1 算术函数

1.1 Dirichlet 卷积.

注记 1.2.2 许多算术函数都可以通过卷积定义，例如 $\tau=u*u,\qquad \omega=u*\delta_p$.

定理 1.2.3 Dirichlet 卷积运算是交换，结合的在逐点加法和 Dirichlet 卷积之下，$\mathcal{A}$ 中所有函数构成一个带单位元的交换环 (unital commutative ring)，乘法单位元为 δ_1.

定理 1.2.4 (手镯标作 Thm 0) 一个算术函数 f 可逆，当且仅当 $f(1)\neq 0$. 如果 f^{-1} 存在，则它是唯一的，并且由下式递归给出：$f^{-1}(1)=\frac{1}{f(1)}$，而当 $n>1$ 时，$f^{-1}(n)=-\frac{1}{f(1)}\sum_{d|n,d<n}f(\frac{n}{d})f^{-1}(d)$.

证明 若 $f*g=I$，则代入 $n=1$ 得 $f(1)g(1)=I(1)=1$，从而 $f(1)\neq 0$.
反过来，对满足 $f(1)\neq 0$ 的 $f\in\mathcal{A}$，我们用递归构造它的逆元 f^{-1}. 先定义 $f^{-1}(1)=\frac{1}{f(1)}$. 对 $n>1$，假设所有 $k<n$ 的 $f^{-1}(k)$ 已经定义。我们需要满足 $f*f^{-1}(n)=I(n)=0$. 于是 $0=\sum_{d|n}f(d)f^{-1}(\frac{n}{d})=f(1)f^{-1}(n)+\sum_{d|n,d\neq 1}f(d)f^{-1}(\frac{n}{d})$，从而得到上面的递归公式。由此可以定义出 $f^{-1}(n)$。唯一由环的性质得到

1.3 Möbius 函数与 Möbius 反演.

回忆 Möbius 函数 μ 的定义。事实上也可以反过来定义 $\mu:=u^{-1}$，也就是说，μ 是常值函数 $u(n)=1$ 的 Dirichlet 逆元，满足 $\mu*u=I$.

证明 只需证明：$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & n=1;\\ 0, & n>1.\end{cases}$ 设 $n>1$ 的唯一分解为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$，那么 $\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|p_1\cdots p_n}\mu(d)=\sum_{d|p_2\cdots p_n}\mu(p_1d)+\mu(d)=0$

练习 1.3.1 证明 $\sum_{d^2|n}\mu(d)=\mu^2(n)$.

例 1.3.3 有 $\varphi=id*\mu$，也即 $\varphi(n)=\sum_{d|n}d\mu(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$.

证明 等价地，只需证明 $\varphi*u=id$，即 $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$. 将集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 分解为互不相交的并：$\{1,2,\ldots,n\}=\bigsqcup_{d|n}A(d),\qquad A(d):=\{k\leq n:(k,n)=d\}$. 对 $k\in A(d)$，令 $c=k/d$，则 $1\leq c\leq\frac{n}{d}$，$(c,\frac{n}{d})=1$. 因此 $|A(d)|=\#\{1\leq c\leq\frac{n}{d}:(c,\frac{n}{d})=1\}=\varphi(\frac{n}{d})$. 于是 $n=\sum_{d|n}\varphi(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\varphi(d)$.

例 1.3.4 有 $u=\Lambda*u$，等价地 $\Lambda=u*\mu$. 也就是说 $\log n=\sum_{d|n}\Lambda(d)$.

例 1.4.4 函数 n^α $(\alpha\in\mathbb{C})$ 以及 $I(n)=\begin{cases}1, & n=1;\\ 0, & n>1\end{cases}$ 是完全乘法函数。

例 1.4.5 $\varphi(n)$ 是乘法函数.

例 1.4.6 由 CRT，

定理 1.4.8 有如下两个结论：(a) 如果 f 和 g 都是乘法函数，则 $f*g$ 也是乘法函数；(b) 如果 g 和 $f*g$ 都是乘法函数，则 f 也是乘法函数.

证明 先证 (a)。设 $(n_1,n_2)=1$，则 $(f*g)(n_1n_2)=\sum_{d|n_1n_2}f(d)g(\frac{n_1n_2}{d})$. 因为 $(n_1,n_2)=1$，每个 $d|n_1n_2$ 唯一写成 $d=d_1d_2$，其中 $d_1|n_1$，$d_2|n_2$。因此 $(f*g)(n_1n_2)=\sum_{d_1|n_1,d_2|n_2}f(d_1d_2)g\left(\frac{n_1}{d_1}\frac{n_2}{d_2}\right)=\left(\sum_{d_1|n_1}f(d_1)g\left(\frac{n_1}{d_1}\right)\right)\left(\sum_{d_2|n_2}f(d_2)g\left(\frac{n_2}{d_2}\right)\right)=(f*g)(n_1)(f*g)(n_2)$.
再证 (b)。反设 f 不是乘法函数。只需证明 $h:=f*g$ 不是乘法函数。由于 f 不是乘法函数，存在 $(m,n)=1$ 使得 $f(mn)\neq f(m)f(n)$. 若 $mn=1$，则 $f(1)\neq f(1)^2$，从而 $f(1)\neq 1$；由于 g 是乘法函数，$g(1)=1$，所以 $h(1)=f*g(1)=f(1)g(1)\neq 1$，故 h 不是乘法函数.
若 $mn>1$，取乘积 mn 在所有反例中最小。此时若 $d_1|m$，$d_2|n$ 且 $d_1d_2<mn$，则由最小性有 $f(d_1d_2)=f(d_1)f(d_2)$. 于是 $h(mn)=\sum_{d|mn}f(d)g(\frac{mn}{d})=\sum_{d_1|m,d_2|n,d_1d_2<mn}f(d_1d_2)g\left(\frac{mn}{d_1d_2}\right)+f(mn)g(1)=\sum_{d_1|m,d_2|n}f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{m}{d_1}\right)g\left(\frac{n}{d_2}\right)-f(m)g(1)f(n)g(1)+f(mn)=h(m)h(n)-f(m)f(n)+f(mn)\neq h(m)h(n)$. 所以 h 不是乘法函数，矛盾推出 (b)。

注记 1.4.9 即使 f 和 g 都是完全乘法函数，也不能推出 $f*g$ 完全乘法。例如 $\tau=u*u$.

推论 1.4.10 如果 f 是乘法函数，则 $F(n):=\sum_{d|n}f(d)=\prod_{p^\alpha\|n}(1+f(p)+\cdots+f(p^\alpha))$.

证明 因为 $F=u*f$ 是乘法函数，所以若 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$，则 $F(n)=F(p_1^{\alpha_1})\cdots F(p_r^{\alpha_r})=\prod_{p^\alpha\|n}(1+f(p)+\cdots+f(p^\alpha))$.

推论 1.4.11 如果 f 是乘法函数，则 $\sum_{d|n}\mu(d)f(d)=\prod_{p|n}(1-f(p))$.

证明 在上一个推论中取算术函数 $d\mapsto\mu(d)f(d)$。它是乘法函数，于是 $\sum_{d|n}\mu(d)f(d)=\prod_{p^\alpha\|n}(1+\mu(p)f(p)+\cdots+\mu(p^\alpha)f(p^\alpha))=\prod_{p|n}(1-f(p))$.

推论 1.4.12 如果 f 是乘法函数，则 f^{-1} 也是乘法函数.

证明 f^{-1} 的存在性来自前面的定理 0：因为 f 是乘法函数，所以 $f(1)\neq 0$。现在 f 和 $f*f^{-1}=I$ 都是乘法函数，因此由上面的定理 (b) 可知，f^{-1} 也是乘法函数.

证明 先设 f 是完全乘法函数. 定义 $g(n)=g(n)f(n)$. 则 $(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(\frac{n}{d})g(d)f(d)=f(n)\sum_{d|n}\mu(d)=I(n)$. 所以 g 是 f 的 Dirichlet 逆元。
反过来，假设 $f^{-1}(n)=\mu(n)f(n)$. 我们要证明 f 是完全乘法函数. 因为 f 已经是乘法函数，只需证明对所有素数 p 和 $\alpha\geq 1$ 都有 $f(p^\alpha)=f(p)^\alpha$. 由 $f*f^{-1}=I$ 并取 $n=p^\alpha$，得到 $\sum_{d|p^\alpha}f(d)\mu(\frac{p^\alpha}{d})=0$. 由于 $\mu(p^j)=0$ 当 $j\geq 2$，上式只剩 $\mu(1)f(1)f(p^\alpha)+\mu(p)f(p)f(p^{\alpha-1})=0$. 因此 $f(p^\alpha)=f(p)f(p^{\alpha-1})$，递归可得 $f(p^\alpha)=f(p)^\alpha$.

例 1.4.16 令 φ 为 Euler 函数. 断言 $\varphi^{-1}=(\mu\cdot id)*u$，其中 $\mu\cdot id$ 表示逐点乘积.

证明 回忆 $\varphi=id*\mu$. 因为 $id(n)=n$ 是完全乘法函数，所以 $id^{-1}=\mu\cdot id$. 于是 $\varphi^{-1}=(id*\mu)^{-1}=id^{-1}*\mu^{-1}=(\mu\cdot id)*u$. 也就是说 $\varphi^{-1}(n)=\sum_{d|n}\mu(d)d$.

1.5 Liouville 函数.

回忆 Liouville 函数 $\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}=(-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_r}\qquad 若n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$.

注记 1.5.1 $\lambda(n)$ 是完全乘法函数，因为 $\Omega(nm)=\Omega(n)+\Omega(m),\qquad \forall n,m$.

定理 1.5.2 对每个 $n\geq 1$，有 $\sum_{d|n}\lambda(d)=\begin{cases}1, & n\text{ 是平方数};\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$ 此外，$\lambda^{-1}(n)=|\mu(n)|,\qquad \forall n$.

证明 因为 λ 是乘法函数，所以 $(u*\lambda)(n)=\sum_{d|n}\lambda(d)$ 也是乘法函数。因此只需验查等式两边在素数幂 $n=p^\alpha$ 上相等。
对于素数 p，$(u*\lambda)(p)=\lambda(1)+\lambda(p)=1-1=0$；而 $(u*\lambda)(p^2)=(-1)^0+(-1)^1+\cdots+(-1)^\alpha$. 故当 α 为奇数时该和为 0，当 α 为偶数时该和为 1。这正是右边.
第二个结论来自上一个定理。因为 λ 完全乘法，所以 $\lambda^{-1}(n)=\mu(n)\lambda(n)=\mu(n)^2=|\mu(n)|$.

1.6 Selberg 恒等式.

回忆 von Mangoldt 函数 $\Lambda(n)=\begin{cases}\log p, & n=p^k\ (k\geq 1),\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$ 我们已经证明 $\log=\Lambda*u$，等价地 $\Lambda=\mu*\log$. 展开卷积定义，得到 $\Lambda(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\log\frac{n}{d}=\log n\sum_{d|n}\mu(d)-\sum_{d|n}\mu(d)\log d$. 由于 $\log n\sum_{d|n}\mu(d)=\log n\,I(n)=0$，因此 $\Lambda=-(\mu\cdot\log)*u$，其中 $\mu\cdot\log$ 表示逐点乘积.

定义 1.6.1 (广义 von Mangoldt 函数 (generalized von Mangoldt function)) 对 $k\geq 0$，定义 $\Lambda_k(n)=\sum_{d|n}\mu(d)(\log\frac{n}{d})^k$. 也即 $\Lambda_k=\mu*\log^k$，其中 $\log^k(n):=(\log n)^k$.

注记 1.6.2 有 $\Lambda_0=I$，$\Lambda_1=\Lambda$.

定理 1.6.3 (Selberg 恒等式 (Selberg's identity)) 有 $\Lambda_k=\Lambda_{k-1}\log+\Lambda_{k-1}*\Lambda$，其中 $\Lambda_{k-1}\log$ 表示逐点乘积.

证明 由 $\Lambda_{k-1}=\mu*\log^{k-1}$ 得 $\log^{k-1}=u*\Lambda_{k-1}$. 同时展开 $\log(n/d)=\log n-\log d$，于是 $\Lambda_k=\mu*\log^k=(\mu*\log^{k-1})\log-(\mu\cdot\log)*\log^{k-1}=\Lambda_{k-1}\log-(\mu\cdot\log)*(u*\Lambda_{k-1})=\Lambda_{k-1}\log+\Lambda*\Lambda_{k-1}=\Lambda_{k-1}\log+\Lambda_{k-1}*\Lambda$.

2 算术函数的平均值

2.2 用积分近似.

算术函数复杂的例子之一来自连续函数. 若 f 不剧烈振荡，我们有理由相信 $\sum_{n\leq x}f(n)\sim\int_1^x f(\xi)d\xi$.

定理 2.2.1 设 $f:[y,x]\to\mathbb{R}$ 是单调函数. 则 $\sum_{y<n\leq x}f(n)=\int_y^x f(\xi)d\xi+(f(\lfloor x\rfloor)-f(y))$.

证明 我们可以假设 f 递增。对任意 $y<n\leq x$，有 $\int_{n-1}^n f(\xi)d\xi\leq f(n)\leq\int_n^{n+1}f(\xi)d\xi$. 对所有满足 $y+1\leq n\leq x$ 的整数 n 求和，得到 $\int_y^x f(\xi)d\xi\leq\sum_{y<n\leq x}f(n)\leq\int_y^x f(\xi)d\xi+(f(\lfloor x\rfloor)+|f(y)|)$. 通减情形可证.

例 2.2.2 函数 $f(x)=\log x$ 是单调的。因此 $\sum_{n\leq x}\log n=\int_1^x\log\xi d\xi+(\log x)$. 计算积分可得 $\sum_{n\leq x}\log n=x\log x-x+O(\log x)$.
不过，并不是很多函数都是单调的.

定理 2.2.3 (Euler–Maclaurin 公式) 设 $f:[y,x]\to\mathbb{C}$ 连续可微。定义 $\psi(\xi):=\{\xi\}-\frac{1}{2}$，其中 $\{\xi\}$ 表示 ξ 的小数部分. 则 $\sum_{y<n\leq x}f(n)=\int_y^x f(\xi)d\xi+\int_y^x\psi(\xi)f'(\xi)d\xi+\psi(y)f(y)-\psi(x)f(x)$.

证明 先考虑 y,x 为整数的情形。我们有如下断言：对所有整数 n，$\int_{n-1}^n f(\xi)d\xi+\int_{n-1}^n(\xi-n-\frac{1}{2})f'(\xi)d\xi=(\xi-n-\frac{1}{2})f(\xi)\Big|_{n-1}^n-\int_{n-1}^n f(\xi)d\xi$. 这个断言由分部积分得到：$\int_{n-1}^n(\xi-n-\frac{1}{2})f'(\xi)d\xi=(\xi-n-\frac{1}{2})f(\xi)\Big|_{n-1}^n-\int_{n-1}^n f(\xi)d\xi$. 于是右边等于 $\int_{n-1}^n f(\xi)d\xi$.
对上式在区间上求和。具体说，对 $y\leq n\leq x-1$ 求和，得到 $\sum_{y\leq n\leq x-1}\frac{f(n+1)+f(n)}{2}=\int_y^x f(\xi)d\xi+\int_y^x\psi(\xi)f'(\xi)d\xi$.
左边为 $\sum_{y<n\leq x}f(n)+\frac{f(y)}{2}-\frac{f(x)}{2}=\sum_{y<n\leq x}f(n)+\psi(y)f(y)-\psi(x)f(x)$. 这就完成了整数端点情形。
现在处理一般的 $y,x\in\mathbb{R}$。这里 $\lfloor t\rfloor$ 表示 t 的整数部分. 断言整端点情形，$\sum_{y<n\leq x}f(n)=f(\lfloor y\rfloor+1)+\sum_{\lfloor y\rfloor+1<n\leq\lfloor x\rfloor}f(n)$. 因此 $\sum_{y<n\leq x}f(n)=\int_y^x f(\xi)d\xi+\int_y^x\psi(\xi)f'(\xi)d\xi-\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(\xi)d\xi-\int_y^{\lfloor y\rfloor+1}f(\xi)d\xi-\int_{\lfloor x\rfloor}^x\psi(\xi)f'(\xi)d\xi-\int_y^{\lfloor y\rfloor+1}\psi(\xi)f'(\xi)d\xi+\frac{f(\lfloor y\rfloor+1)+f(\lfloor x\rfloor)}{2}$. 观察到 $\int_{\lfloor x\rfloor}^x f(\xi)d\xi+\int_{\lfloor x\rfloor}^x\psi(\xi)f'(\xi)d\xi=\psi(x)f(x)+\frac{1}{2}f(\lfloor x\rfloor)$. 类似地，$\int_y^{\lfloor y\rfloor+1}f(\xi)d\xi+\int_y^{\lfloor y\rfloor+1}\psi(\xi)f'(\xi)d\xi=-\psi(y)f(y)+\frac{1}{2}f(\lfloor y\rfloor+1)$. 最终得到 $\sum_{y<n\leq x}f(n)=\int_y^x f(\xi)d\xi+\int_y^x\psi(\xi)f'(\xi)d\xi+\psi(y)f(y)-\psi(x)f(x)$.

推论 2.2.4 (原文 Corollary 1) 有 $\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+O(\frac{1}{x})$，其中 $\gamma=1-\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^2}d\xi$ 是 Euler 常数 (Euler constant)。

证明 由 Euler–Maclaurin 公式，$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=1+\sum_{1<n\leq x}\frac{1}{n}=1+\int_1^x\frac{1}{\xi}d\xi-\int_1^x\frac{\psi(\xi)}{\xi^2}d\xi+\psi(1)-\psi(x)\frac{1}{x}=1+\log x-\int_1^\infty\frac{\psi(\xi)}{\xi^2}d\xi+\int_x^\infty\frac{\psi(\xi)}{\xi^2}d\xi-\frac{1}{2}+\psi(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}+\log x-\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^2}d\xi+\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{d\xi}{\xi^2}+\psi(\frac{1}{x})=\log x+1-\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^2}d\xi+O(\frac{1}{x})=\log x+\gamma+O(\frac{1}{x})$.

推论 2.2.4 (原文 Corollary 1) 有 $\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+O(\frac{1}{x})$，其中 $\gamma=1-\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^2}d\xi$ 是 Euler 常数 (Euler constant)。

证明 由 Euler–Maclaurin 公式，$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=1+\int_1^x\frac{1}{\xi}d\xi-\int_1^x\frac{\psi(\xi)}{\xi^2}d\xi+\psi(1)-\psi(x)\frac{1}{x}=1+\int_1^x\frac{1}{\xi}d\xi-\int_1^\infty\frac{\psi(\xi)}{\xi^2}d\xi+\int_x^\infty\frac{\psi(\xi)}{\xi^2}d\xi-\frac{1}{2}+\psi(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}+\log x-\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^2}d\xi+\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{d\xi}{\xi^2}+\psi(\frac{1}{x})=\log x+1-\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^2}d\xi=\log x+\gamma+O(\frac{1}{x})$.

2.3 卷积方法.

若 $h=f*g$，并且知果我们可以估计 g 的部分和，那么 $\sum_{n\leq x}h(n)=\sum_{n\leq x}\sum_{dm=n}f(d)g(m)=\sum_{d\leq x}f(d)\sum_{m\leq x/d}g(m)$.

定理 2.3.1 (原文 Theorem 3) 有 $\sum_{n\leq x}\varphi(n)=Cx^2+O(x\log x),\qquad C=\frac{3}{\pi^2}$.

证明 回忆 $\varphi=id*\mu$，$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$. 于是 $\sum_{n\leq x}\varphi(n)=\sum_{d\leq x}\mu(d)\sum_{m\leq x/d}m=\sum_{d\leq x}\mu(d)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{d}\right)^2+O\left(\frac{x}{d}\right)\right)=\frac{x^2}{2}\sum_{d\leq x}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(x\sum_{d\leq x}\frac{1}{d}\right)=\frac{x^2}{2}\left(\sum_{d=1}^\infty\frac{\mu(d)}{d^2}-\sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)+O(x\log x)=\frac{x^2}{2}\sum_{d=1}^\infty\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(x^2\sum_{d>x}\frac{1}{d^2}+x\log x\right)=\frac{x^2}{2\zeta(2)}+O(x\log x)$. 由于 $\zeta(2)=\pi^2/6$，所以 $C=3/\pi^2$.

命题 2.3.5 (原文 Proposition 1) 对任意正整数 A，存在无界多个 $n\in\mathbb{N}$，使得 $(\log n)^A<\tau(n)$.

证明 取固定互异的素数 $p_1,p_2,\ldots,p_{A+1}$. 并考虑 $n=(p_1p_2\cdots p_{A+1})^r$，其中 $r\geq 1$ 是任意整数. 则 $\tau(n)=\tau(p_1^r)\cdots\tau(p_{A+1}^r)=(r+1)^{A+1}$. 另一方面，$(\log n)^A=r^A(\log p_1+\cdots+\log p_{A+1})^A$. 由于 r 可以任意大，所以存在无穷多个这样的 n 使 $(\log n)^A\leq\tau(n)$.

命题 2.3.6 (原文 Proposition 2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon>0$，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$，$\tau(n)\leq C_\varepsilon n^\varepsilon$. 换句话说，$\tau(n)\ll n^\varepsilon$ 或 $\tau(n)=O(n^\varepsilon)$.
说实际 $O(x)$ 对 $\sum_{n\leq x}\tau(n)$ 而言并不令人满意。为了改进它，我们引入 Dirichlet 双曲线方法 (Dirichlet hyperbola method)。

定理 2.4.1 设 $h=f*g$. 那么对任意 $y\leq x$，有 $\sum_{n\leq x}h(n)=\sum_{d\leq y}f(d)\sum_{m\leq x/d}g(m)+\sum_{m\leq x/y}g(m)\sum_{d\leq x/m}f(d)-\left(\sum_{d\leq y}f(d)\right)\left(\sum_{m\leq x/y}g(m)\right)$.

证明 我们要计算 $\sum_{n\leq x}h(n)=\sum_{dm\leq x}f(d)g(m)$. 于是 $\sum_{n\leq x}h(n)=\sum_{d\leq y}f(d)\sum_{m\leq x/d}g(m)+\sum_{m\leq x/y}g(m)\sum_{d\leq x/m}f(d)-\sum_{d\leq y}f(d)\sum_{m\leq x/y}g(m)$.

定理 2.4.2 (原文 Theorem 4) 有 $\sum_{n\leq x}\tau(n)=x\log x+(2\gamma-1)x+O(x^{1/2})$.

证明 取 $y=\sqrt{x}$. 由于 $\tau=u*u$，由 Dirichlet 双曲线方法得到 $\sum_{n\leq x}\tau(n)=2\sum_{d\leq\sqrt{x}}[\frac{x}{d}]-[\sqrt{x}]^2=2\sum_{d\leq\sqrt{x}}(\frac{x}{d}+O(1))-(\sqrt{x}+O(1))^2=2x\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{1}{d}+O\left(\sum_{d\leq\sqrt{x}}1\right)-x+O(x^{1/2})=2x\left(\log\sqrt{x}+\gamma+O(x^{-1/2})\right)-x+O(x^{1/2})=x\log x+(2\gamma-1)x+O(x^{1/2})$.
只有有限的一类算术函数 $h\in\mathcal{A}$ 可以写成 Dirichlet 卷积 $h=f*g$. 问题是：如果我们知道 $f(n)$ 的部分和 $\sum_{m\leq y}f(m)$，那么知道我们可以计算 $h(n)=f(n)g(n)$，其中 g 是一个比较好的函数？这由 Abel 求和提供.

2.5 Abel 求和公式.

定理 2.5.1 (Abel 求和公式；原文 Theorem 5) 设 f 是一个算术函数，且 $g:[y,x]\to\mathbb{C}$ 连续可微。则 $\sum_{y<n\leq x}f(n)g(n)=\left(\sum_{n\leq x}f(n)\right)g(x)-\left(\sum_{n\leq y}f(n)\right)g(y)-\int_y^x\left(\sum_{n\leq\xi}f(n)\right)g'(\xi)d\xi$.

证明 另一种写法是 $\sum_{y<n\leq x}f(n)g(n)=\int_y^x g(\xi)d\sum_{y<n\leq\xi}f(n)$. 下面证明手稿中的离散版本。我们可以假设 $[y]+1\leq[x]$. 记 $F(x):=\sum_{n\leq x}f(n)$. 则 LHS $=\sum_{y<n\leq x}(F(n)-F(n-1))g(n)=\sum_{y<n\leq x}F(n)g(n)-\sum_{y+1<n\leq x}F(n-1)g(n)=\sum_{y<n\leq x-1}F(n)(g(n)-g(n+1))+F([x])g([x])-F([y])g([y]+1)=-\sum_{y<n\leq x-1}F(n)\int_{n+1}^{n+1}g'(\xi)d\xi+F([x])g([x])-F([y])g([y]+1)=-\int_{[y]+1}^{[x]}F(\xi)g'(\xi)d\xi+F([x])g([x])-F([y])g([y]+1)$. 最后注意到 $F(x)g([x])=F(x)g(x)-\int_{[x]}^x F(\xi)g'(\xi)d\xi$，以及 $F(y)g([y]+1)=F(y)g(y)+\int_{[y]+1}^{[y]+1}F(\xi)g'(\xi)d\xi$. 于是得到 LHS $=-\int_y^x F(\xi)g'(\xi)d\xi+F(x)g(x)-F(y)g(y)$，这正是右边.

例 2.5.2 回忆在 Theorem 3 中已经证明 $\sum_{n\leq x}\varphi(n)=Cx^2+O(x\log x)$，$C=\frac{3}{\pi^2}$. 利用它可以证明下面的结论.

定理 2.5.3 (原文 Theorem 6) 有 $\sum_{n\leq x}\frac{\varphi(n)}{n}=2Cx+O(\log^2 x)$.

证明 由 Abel 求和，取 $g(\xi)=1/\xi$. 得到 $\sum_{n\leq x}\varphi(n)\frac{1}{n}=1+\left(\sum_{n\leq x}\varphi(n)\right)\frac{1}{x}-\left(\sum_{n\leq 1}\varphi(n)\right)\cdot 1-\int_1^x\left(\sum_{n\leq\xi}\varphi(n)\right)\left(\frac{1}{\xi}\right)'d\xi=\frac{1}{x}(Cx^2+O(x\log x))+\int_1^x(C\xi^2+O(\xi\log\xi))\frac{1}{\xi^2}d\xi=Cx+O(\log x)+C\int_1^x d\xi+O\left(\int_1^x\frac{\log\xi}{\xi}d\xi\right)=2Cx+O(\log x)+O(\log^2 x)=2Cx+O(\log^2 x)$.
至于单个的 $\varphi(n)$，有下面的关键下界.

定理 2.5.4 (原文 Theorem 7) 有 $\varphi(n)\gg\frac{n}{\log\log n}$.

证明 回忆 $\varphi(p^\alpha)=p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)$. 于是 $\frac{\varphi(n)}{n}=\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.
于是 $\log\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{p|n}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=-\sum_{p|n}\frac{1}{n}+\sum_{p|n}\left(\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)$. (*1) 回忆 Taylor 展开 $\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\cdots$. 因此 $\sum_{p|n}\left(\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right)\ll\sum_{p|n}\frac{1}{p^2}\ll\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m^2}\ll 1$. 对于第一项，我们写 $\sum_{p|n}\frac{1}{p}=\sum_{p|n,p<\log n}\frac{1}{p}+\sum_{p|n,p\geq\log n}\frac{1}{p}$. (*2) 若记 $p_1,p_2,\ldots,p_{r-\ell}$ 为整除 n 且小于 $\log n$ 的素数，并记 $p_{r-\ell+1},\ldots,p_r$ 为整除 n 且大于 $\log n$ 的素数，其中有 ℓ 个，则 $(\log n)^\ell\leq\prod_{k=r-\ell+1}^r p_k\leq n$. 从而 $\ell\leq\frac{\log n}{\log\log n}$. 把这个用于 (*2) 的第二项，可得 $sum_{p|n,p>\log n}\frac{1}{p}\leq\frac{\log n}{\log\log n}$. $\frac{\log n}{\log\log n}=O(1)$. 现在考虑第一项。如果我们使用 Mertens 定理 (Mertens' theorem) 之一：$sum_{p\leq x}\frac{1}{p}=\log\log x+C+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$，原文穷注：to be proved later，则回到 (*2) 有 $sum_{p|n}\frac{1}{p}\leq\log\log\log n+O(1)$. 代入 (*1)，得到 $\log\frac{\varphi(n)}{n}\geq-\log\log\log n+O(1)$，因此 $\frac{\varphi(n)}{n}\gg\frac{1}{\log\log n}$，也就是 $\varphi(n)\gg\frac{n}{\log\log n}$.

2.12 之 2.5

(a) 如果避免使用 Mertens 定理，那么我们会有 $\sum_{p|n,p<\log n}\frac{1}{p}\leq\sum_{m\leq\log n}\frac{1}{m}\ll\log\log n$. 这只会推出 $\frac{\varphi(n)}{n}\gg\frac{1}{\log n}$.
(b) 作为练习，可以证明存在一个递增序列 n_k，使得 $\varphi(n_k)\ll\frac{n_k}{\log\log n_k}$. 因此 Theorem 7 中的下界是 sharp。

3 素数分布的初等结果

3.1 素数定理的等价形式.

回忆素数定理 (Prime Number Theorem) 断言：当 $x\to\infty$ 时，$\pi(x):=\sum_{p\leq x}1\sim\frac{x}{\log x}$；或者等价地，$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1$. Legendre 和 Gauss 曾独立猜想该结论。有时用权重来数素数更有用。为此我们引入两个函数：$\theta(x)=\sum_{p\leq x}\log p$ 以及 $\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$，其中 $\Lambda(n)=\begin{cases}\log p, & n=p^k,\ k\geq 1,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$ 是 von Mangoldt 函数 (von Mangoldt function)。$\psi(x)$ 通常称为 Chebyshev 函数 (Chebyshev function)。
回忆 $\log n=\sum_{d|n}\Lambda(d)$，也即 $\log=\Lambda*u$. 由 Möbius 反演 (Möbius inversion)，这等价于 $\Lambda=\log*\mu$.

引理 3.1.1 (原文 Lemma 1) 有 $\psi(x)=\theta(x)+O(x^{1/2}\log x)$.

证明 由定义，$\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=\sum_{n\leq x}\log p=\sum_{p^\alpha\leq x}\log p+\sum_{p^\alpha\leq x,\alpha\geq 2}\log p=\theta(x)+\sum_{p\leq x^{1/2}}\log p\sum_{2\leq\alpha\leq\log x/\log p}1=\theta(x)+O\left(\sum_{p\leq x^{1/2}}\log p\cdot\frac{\log x}{\log p}\right)=\theta(x)+O(x^{1/2}\log x)$.

定理 3.1.2 (原文 Theorem 3.2) 以下三个命题等价：(i) $\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$；(ii) $\theta(x)\sim x$；(iii) $\psi(x)\sim x$.

证明 in Lemma 3.1.1，只需要证明 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

先证明 (i) $\Rightarrow$ (ii)。假设 $\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$. 由 Abel 求和，$\theta(x)=sum_{p\leq x}\log p=\sum_{1<n\leq x}1_{n\in\mathbb{P}}\log n=\left(\sum_{p\leq x}1\right)\log x-\int_1^x\frac{\sum_{p\leq y}1}{y}dy=\pi(x)\log x-\int_1^x\frac{\pi(y)}{y}dy=x+o(x)+O\left(\int_1^x\frac{dy}{\log y}\right)$. 由于 $\int_1^x\frac{dy}{\log y}=\int_1^{\sqrt{x}}\frac{dy}{\log y}+\int_{\sqrt{x}}^x\frac{dy}{\log y}\ll\sqrt{x}+\frac{x}{\log\sqrt{x}}\ll\frac{x}{\log x}$，所以 $\theta(x)=x+o(x)$.

反过来，假设 $\theta(x)\sim x$. 再次由 Abel 求和，$\pi(x)=\sum_{3/2<n\leq x}\log n1_{n\in\mathbb{P}}\cdot\frac{1}{\log n}=\left(\sum_{p\leq x}\log p\right)\frac{1}{\log x}+\int_{3/2}^x\frac{\sum_{p\leq y}\log p}{y\log^2 y}dy=\frac{x+o(x)}{\log x}+\int_{3/2}^x\frac{y+o(y)}{y\log^2 y}dy=\frac{x}{\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right)+\int_{3/2}^x\frac{dy}{\log^2 y}$. 利用类似的估计，$\int_{3/2}^x\frac{dy}{\log^2 y}\ll\frac{x}{\log^2 x}=o\left(\frac{x}{\log x}\right)$. 因此 $\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$.
Chebyshev 对素数定理作出了第一个重要贡献。

3.2 Chebyshev 定理.

定理 3.2.1 (原文 Theorem 3.3) 有 $\pi(x)\asymp\frac{x}{\log x},\qquad \theta(x)\asymp x,\qquad \psi(x)\asymp x$.

证明 我们先建立 $\psi(x)\ll x$. 记 $S(x):=\sum_{n\leq x}\log n-2\sum_{n\leq x/2}\log n$. 回忆 $\sum_{n\leq y}\log n=y\log y-y+O(\log y)$. 因此 $S(x)=x\log x-x-2\left(\frac{x}{2}\log\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)+O(\log x)=(\log 2)x+O(\log x)$. (*1) 又回忆 $\log n=\Lambda*u$. 那么 $sum_{n\leq y}\log n=\sum_{d\leq y}\Lambda(d)\left[\frac{y}{d}\right]$. 于是 $S(x)=\sum_{d\leq x}\Lambda(d)\left[\frac{x}{d}\right]-2\sum_{d\leq x/2}\Lambda(d)\left[\frac{x}{2d}\right]=\sum_{d\leq x}\Lambda(d)\left(\left[\frac{x}{d}\right]-2\left[\frac{x}{2d}\right]\right)$. (*2) 注意到对所有 $x\geq 1$，$[\alpha]-2\left[\frac{\alpha}{2}\right]\in\{0,1\}$，并且当 $1\leq\alpha<2$ 时，$[\alpha]-2\left[\frac{\alpha}{2}\right]=1$. 由 (*2) 得 $\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{x/2<d\leq x}\Lambda(d)\leq S(x)\leq sum_{d\leq x}\Lambda(d)=\psi(x)$. 从 (*1) 可见 $S(x)=(\log 2)x$，所以 $\psi(x)\geq S(x)\gg x$. 另一方面，对每个 $x\geq 2^j$，有 $\psi\left(\frac{x}{2^j}\right)-\psi\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right)\leq S\left(\frac{x}{2^j}\right)\ll\frac{x}{2^j}$. 对所有 $j\geq 0$ 求和，得到 $\psi(x)=\sum_{j=0}^\infty\left(\psi\left(\frac{x}{2^j}\right

例 4.2.3 Dirichlet 卷积的单位元为 $I(n)=\begin{cases}1, & n=1;\\ 0, & n>1;\end{cases}$ 它的 Dirichlet 级数为 $L_I(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{I(n)}{n^s}=1$.

例 4.2.4 令 $u(n)=1$ 对所有 $n\geq 1$ 成立。那么 $\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{u(n)}{n^s}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$, $\quad \mathrm{Re}(s)>1$, 这就是 Riemann zeta 函数。

例 4.2.5 除数函数 $\tau(n)=(u*u)(n)$ 满足 $L_\tau(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n)}{n^s}=\sum_{n\geq 1}\frac{\sum_{k|n}u(k)}{n^s}=\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^s}\right)\left(\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^s}\right)=\zeta(s)^2$, $\quad \mathrm{Re}(s)>1$. 类似地，若 $\tau_k(n)=\sum_{d_1d_2\cdots d_k=n}1=(u*\cdots*u)(n)$, 其中右侧有 k 个 u, 则 $L_{\tau_k}(s)=\zeta(s)^k$, $\quad \mathrm{Re}(s)>1$.

例 4.2.6 Möbius 函数满足 $\mu*u=I$. 于是当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时，$1=L_I(s)=L_{\mu*u}(s)=L_\mu(s)L_u(s)=\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\zeta(s)$. 所以 $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}$, $\quad \mathrm{Re}(s)>1$.

注记 4.2.7 这也给出 $Q_2(x):=\#\{n\leq x: n \text{ is square-free}\}=Cx+O(\sqrt{x})$, 其中 $C=\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}=\frac{6}{\pi^2}$. 课堂笔记劣注还写到 $\sum_{n\leq x}\varphi(n)=Cx^2+O(x\log x)=\frac{6}{\pi^2}x^2+O(x\log x)$.

更一般地，假设 $L_f(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n^s}$ 在 $\mathrm{Re}(s)>\sigma_a$ 时绝对收敛。如果 $f(n)$ 是完全乘法函数 (completely multiplicative function)，则我们知道 $f^{-1}(n)=\mu(n)f(n)$. 所以 $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)f(n)}{n^s}=\frac{1}{L_f(s)}$, $\quad \mathrm{Re}(s)>\sigma_a$.

例 4.2.8 令 $f(n)=\log n$。那么 $L_f(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{\log n}{n^s}=-\zeta'(s)$, $\quad \mathrm{Re}(s)>1$. 为看出这一点，回忆 $\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}1/n^s$ 在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时绝对收敛。于是 $\zeta'(s)=-\sum_{n\geq 1}\frac{\log n}{n^s}$ 也在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时绝对收敛。

例 4.2.9 von Mangoldt 函数 (von Mangoldt function) $\Lambda(n)$ 满足 $\Lambda=\mu*\log$, 也即 $\log=\Lambda*u$. 于是 $\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=L_\Lambda(s)=L_{\mu*\log}(s)=L_\mu(s)L_{\log}(s)=\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\log n}{n^s}\right)=-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, $\quad \mathrm{Re}(s)>1$. 旁注：这与 PNT 的解析证明密切相关。

例 4.2.10 Liouville 函数满足 $\lambda*u=1_\square$, 即 $\sum_{d|n}\lambda(d)=\begin{cases}1, & n \text{ 是平方数},\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$ 于是 $L_{\lambda*u}(s)=L_\lambda(s)L_u(s)=\left(\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda(n)}{n^s}\right)\zeta(s)$, 而 $L_{1_\square}(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1_\square(n)}{n^s}=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2s}}=\zeta(2s)$. 所以 $\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$, $\quad \mathrm{Re}(s)>1$.

例 4.2.11 Euler 函数 (Euler phi function) 满足 $\varphi=\mathrm{id}*\mu$, 也即 $\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$. 因此 $L_\varphi(s)=L_{\mathrm{id}}(s)L_\mu(s)=\left(\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n^s}\right)\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}=\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{s-1}}\right)\frac{1}{\zeta(s)}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$, $\quad \mathrm{Re}(s)>2$.

例 4.2.12 令 $f(n):=\sum_{d|n}\frac{\varphi(d)}{d}$, $\quad g(n):=\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}\tau(n/d)$. 断言：$f(n)=g(n)$. 证明这一点只需证明 $L_f(s)=L_g(s)$. 对了，有 $L_f(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{\sum_{d|n}\varphi(d)/d}{n^s}=\sum_{n\geq 1}\frac{(\varphi\cdot\mathrm{id}^{-1}*u)(n)}{n^s}=L_{\varphi\cdot\mathrm{id}^{-1}}(s)L_u(s)=L_\varphi(s+1)\zeta(s)=\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)}\cdot\zeta(s)=\frac{\zeta(s)^2}{\zeta(s+1)}$. 对 L_g, 有 $L_g(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}\tau(n/d)}{n^s}=\left(\sum_{d\geq 1}\frac{\mu(d)}{d^{s+1}}\right)\left(\sum_{m\geq 1}\frac{\tau(m)}{m^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s+1)}\zeta(s)^2$. 因此 $f(n)=g(n)$.

例 4.2.13 上一讲由 $\lambda=1_\square*\mu$ 证明了 $\mu=\lambda*(1_\square)^{-1}=\lambda*\mu(\sqrt{\cdot})1_\square$. 也就是说 $1_\square^{-1}=\mu(\sqrt{\cdot})1_\square$. 这等价于 $1_\square*\mu(\sqrt{\cdot})1_\square=I(n)$. 也就是说 $L_{1_\square*\mu(\sqrt{\cdot})1_\square}(s)=1$. 事实上 $\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1_\square(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{m\geq 1}\frac{\mu(\sqrt{m})1_\square(m)}{m^s}\right)=\left(\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2s}}\right)\left(\sum_{m\geq 1}\frac{\mu(m)}{m^{2s}}\right)=\zeta(2s)\frac{1}{\zeta(2s)}=1$.

4.3 Euler 系和.

与乘法函数 f 对应的 Dirichlet 级数 $L_f(s)$ 具有很好的性质。

定理 4.3.1 (原文 Theorem 4.7) 设 $f\in\mathcal{A}$ 是乘法函数。假设 $L_f(s)$ 在 s 处绝对收敛。那么 $L_f(s)=\prod_p\left(1+\sum_{\ell\geq 1}\frac{f(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right)$, 其中无穷乘积绝对收敛。

进一步，若 f 是完全乘法函数，则 $L_f(s)=\prod_p\frac{1}{1-f(p)p^{-s}}=\prod_p(1-f(p)p^{-s})^{-1}$.

证明 我们首先证明无穷乘积 $\prod_p\left(1+\sum_{\ell\geq 1}\frac{f(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right)$ 绝对收敛。回忆 $\sum_{n\geq 1}a_n$ 绝对收敛 $\Longrightarrow\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ 绝对收敛.

因此只需证明 $\sum_p\left|\sum_{\ell\geq 1}\frac{f(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right|<\infty$. 确实，$\sum_p\left|\sum_{\ell\geq 1}\frac{f(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right|\leq\sum_p\sum_{\ell\geq 1}\left|\frac{f(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right|\leq\sum_n\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|<\infty$, 因为 $L_f(s)$ 绝对收敛.

现在只需证明 $\prod_p\left(1+\sum_{\ell\geq 1}\frac{f(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right)=L_f(s)$. 考虑 $P(s,x):=\prod_{p\leq x}\left(1+\sum_{\ell\geq 1}\frac{f(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right)$. 我们要证明 $P(s,x)\to L_f(s)$ 当 $x\to\infty$.

令 $p_1,p_2,\ldots,p_r$ 为所有不超过 x 的素数. 则 $P(s,x)=\prod_{1\leq r}\left(1+\sum_{\ell_1\geq 1}\frac{f(p_1^{\ell_1})}{p_1^{\ell_1 s}}\right)=\sum_{\ell_1\geq 0}\cdots\sum_{\ell_r\geq 0}\frac{f(p_1^{\ell_1}\cdots p_r^{\ell_r})}{(p_1^{\ell_1}\cdots p_r^{\ell_r})^s}$.

由算术基本定理，$P(s,x)=\sum_{n\in N(x)}\frac{f(n)}{n^s}$, 其中 $N(x)=\{n\in\mathbb{N}: \text{若} p|n, \text{则} p\leq x\}$. 于是 $|P(s,x)-L_f(s)|=\left|\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus N(x)}\frac{f(n)}{n^s}\right|\leq\sum_{n>x}\left|\frac{f(n)}{n^s}\right|\to 0$ 当 $x\to\infty$, 因为 $L_f(s)$ 绝对收敛. 因此 $P(s,x)\to L_f(s)$.

最后，如果 f 是完全乘法函数，则 $L_f(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{f(n)^2}{p^s}=\sum_{\ell\geq 0}\frac{f(p^\ell)^2}{p^{\ell s}}=\prod_p\frac{1}{1-f(p)^2p^{-s}}=(1-f(p)p^{-s})^{-1}$.

例 4.3.2 令 $f(n)=1$, 则 f 是完全乘法函数. 并且 $\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$, $\quad \mathrm{Re}(s)>1$.

推论 4.3.3 (原文 Corollary 4.8) 当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时，$\zeta(s)\neq 0$.

证明 由 Euler 乘积，$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|=\left|\prod_p(1-p^{-s})\right|\leq\prod_p\left(1+\frac{1}{p^\sigma}\right)\leq\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\sigma}\leq 1+\int_1^\infty u^{-\sigma}\,du=\frac{\sigma}{\sigma-1}$. 所以 $|\zeta(s)|\geq\frac{\sigma-1}{\sigma}>0$ 只要 $\sigma>1$.

例 4.3.4 刚才用 $\varphi=\mathrm{id}*\mu$ 证明了 $\sum_{n\geq 1}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$, $\quad \mathrm{Re}(s)>2$.

这一点也可以用 Euler 乘积来验证。事实上，由于 $\varphi(p^\ell)=p^{\ell-1}(p-1)$, 所以当 $\mathrm{Re}(s)>2$ 时，$\sum_{n\geq 1}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\sum_{\ell\geq 1}\frac{\varphi(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right)=\prod_p\left(1+\sum_{\ell\geq 1}\frac{p^{\ell-1}(p-1)}{p^{\ell s}}\right)=\prod_p\left(1+\sum_{\ell\geq 1}\frac{1}{p^{\ell(s-1)}}-p^{-1}\sum_{\ell\geq 1}\frac{1}{p^{\ell(s-1)}}\right)=\prod_p\left(1+\frac{p^{1-s}}{1-p^{1-s}}-\frac{p^{-s}}{1-p^{1-s}}\right)=\prod_p(1-p^{-s})\prod_p(1-p^{1-s})^{-1}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$. 最后一步是和 $\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$ 作比较得到的。

例 4.3.5 对 Möbius 函数，$\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\sum_{\ell\geq 1}\frac{\mu(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right)=\prod_p(1-p^{-s})=\zeta(s)^{-1}$, $\quad \mathrm{Re}(s)>1$.

例 4.3.6 对 Liouville 函数，由于 λ 是完全乘法函数，且 $\lambda(p)=-1$, 有 $\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda(n)}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_p\frac{1-p^{-s}}{(1-p^{-s})(1+p^{-s})}=\prod_p(1-p^{-s})\prod_p(1-p^{-2s})^{-1}=\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$. 这和前面用 $\lambda*u=1_\square$ 得到的结果相同。

4.4 Perron 公式.

我们已经研究了 Dirichlet 级数 $L_f(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n^s}$ 的一些性质。如何使用 $L_f(s)$ 来研究数论中的问题？一个工具是 Perron 公式 (Perron's formula)。Perron 公式把部分和 $\sum_{n\leq x}f(n)$ 表达为含有 $L_f(s)$ 的轮廓积分 (contour integral)。

粗略地说，$\sum_{n\leq x}f(n)$ 经过变换 $\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}L_f(s)x^s\frac{ds}{s}$.

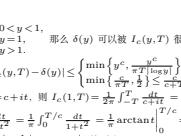
定义 $I_c(x,T):=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}y^s\frac{ds}{s}$, 并定义 $\delta(y):=\begin{cases}0, & 0<y<1,\\ \frac{1}{2}, & y=1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$ 那么 $\delta(y)$ 可以被 $I_c(y,T)$ 很好地逼近。

引理 4.4.1 (原文 Lemma 4.9) 设 $c,y,T>0$ 为实数。那么 $|I_c(y,T)-\delta(y)|\leq\begin{cases}\min\left\{y^c,\frac{y^c}{\pi T|\log y|}\right\}\leq\frac{2y^c}{1+T|\log y|}, & y\neq 1,\\ \min\left\{\frac{c}{\pi T},\frac{1}{2}\right\}\leq\frac{c}{c+T}, & y=1.\end{cases}$

证明 先假设 $y=1$。那么 $I_c(1,T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{ds}{s}$. 令 $s=c+it$, 则 $I_c(1,T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{dt}{c+it}=\frac{1}{2\pi}\int_0^T\frac{dt}{c+it}+\frac{1}{2\pi}\int_0^T\frac{dt}{c-it}=\int_0^T\frac{c\,dt}{c^2+t^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{T/c}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{T}{c}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{c}{T}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan\frac{c}{T}$. 因此 $|I_c(1,T)-\frac{1}{2}|\leq\frac{1}{2}|\arctan\frac{c}{T}|$. 特别地，$|\arctan x|\leq\min\{|x|,\pi/2\}$. 于是 $|I_c(1,T)-\frac{1}{2}|\leq\frac{1}{2}\min\{\frac{c}{T},\frac{\pi}{2}\}\leq\frac{c}{c+T}$.

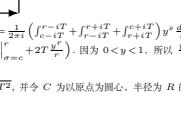
现在假设 $y\neq 1$。

情形 1：$0<y<1$。我们用两种方式估计 $I_c(y,T)$。



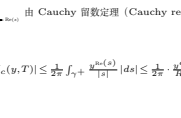
(a) 取 $r>\max\{1,c\}$，并考虑如下矩形轮廓：由 Cauchy 积分定理 (Cauchy's integral theorem)，由于 y^s/s 在这个矩形内部没有极点，$I_c(y,T)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-iT}^{r-iT}+\int_{r-iT}^{r+iT}+\int_{r+iT}^{c+iT}\right)y^s\frac{ds}{s}$. 于是 $|I_c(y,T)|\leq\frac{1}{2\pi}\left(\int_c^r\frac{y^\sigma}{T}\,d\sigma+\int_{-T}^{T}\frac{y^r}{r}\,dt+\int_c^r\frac{y^\sigma}{T}\,d\sigma\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{T}\cdot\frac{y^\sigma}{\log y}\Big|_{\sigma=c}^{r}+2T\cdot\frac{y^r}{r}\right)$. 因为 $0<y<1$, 所以 $\frac{y^r}{r}\to 0$, $\frac{y^r}{|\log y|}\to 0$ 当 $r\to+\infty$. 因此 $|I_c(y,T)|\leq\frac{1}{\pi T}\frac{y^c}{|\log y|}$.

(b) 另一方面，我们要证明 $|I_c(y,T)|\leq y^c$. 令 $R=\sqrt{c^2+T^2}$, 并令 C 为以原点为圆心、半径为 R 的圆。令 γ^+ 为 C 上从 $c-iT$ 出发到 $c+iT$ 结束的逆时针路径：



由 Cauchy 留数定理 (Cauchy residue theorem)，$I_c(y,T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}y^s\frac{ds}{s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+}+y^s\frac{ds}{s}$. 特别地，$|I_c(y,T)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma^+}\frac{y^{\mathrm{Re}(s)}}{|s|}|ds|\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{y^c}{R}\cdot 2\pi R\leq y^c$, 这里用到了 $y<1$.

情形 2：$y>1$。这时考虑如下矩形：



由 Cauchy 留数定理，$I_c(y,T)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c-iT}^{c+iT}+\int_{c+iT}^{-1+iT}+\int_{-1+iT}^{-1-iT}+\int_{-1-iT}^{c-iT}\right)y^s\frac{ds}{s}$. 和前面做同样的估计，并令 $r\to-\infty$, 得到 $|I_c(y,T)-1|\leq\frac{1}{1+T|\log y|}$. 结合两种估计，即得引理。 □

定理 4.4.2 (原文 Theorem 4.10，Perron 公式) 设 $c>0$, $x,T\geq 1$ 为实数。设 $f\in\mathcal{A}$, 且 $L_f(s)$ 在 $s=c$ 处绝对收敛。那么对所有 $x\notin\mathbb{Z}$, 有 $\sum_{n\leq x}f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}L_f(s)\frac{x^s}{s}\,ds+E(T)$, 其中 $E(T)\to 0$ 当 $T\to\infty$。如果 $x\in\mathbb{Z}$, 则公式也成立，只需把最后一项 $f(x)/2$ 替换为 $f(x)/2$。

证明 设 $x\notin\mathbb{Z}$。因为 $L_f(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)=c$ 上绝对收敛，所以可以交换求和与积分的次序：$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}L_f(s)\frac{x^s}{s}\,ds=\sum_{n\geq 1}f(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}$. 由 Lemma 4.9，$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}L_f(s)\frac{x^s}{s}\,ds=\sum_{n\geq 1}f(n)\delta\left(\frac{x}{n}\right)+E(T)$, 其中 $|E(T)|\leq 2\sum_{n\geq 1}\frac{|f(n)|}{1+T|\log(x/n)|}=2x^c\sum_{n\geq 1}\frac{|f(n)|}{n^c(1+T|\log(x/n)|)}$. 由于 $\log(x/n)\neq 0$, 所以 $|E(T)|\to 0$ 当 $T\to\infty$. 因此 $\sum_{n\geq 1}f(n)\delta\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leq x}f(n)$. $x\in\mathbb{Z}$ 的情形类似。 □

注记 4.4.3 积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}L_f(s)\frac{x^s}{s}\,ds$ 通常不是绝对收敛的，这会带来问题。在实践中，我们需要一个更实用的版本。

定理 4.4.4 (原文 Theorem 4.11，Perron 公式的截断版本) 设 $c>0$, $x,T\geq 1$ 为实数。设 $f\in\mathcal{A}$, 且 $L_f(s)$ 在 $s=c$ 处绝对收敛。那么对所有 $x\notin\mathbb{Z}$, 有 $\sum_{n\leq x}f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}L_f(s)\frac{x^s}{s}\,ds+O\left(x^c\sum_{n\geq 1}\frac{|f(n)|}{n^c(1+T|\log(x/n)|)}\right)$, 其中误差项还满足 $x^c\sum_{n\geq 1}\frac{|f(n)|}{n^c(1+T|\log(x/n)|)}\ll\frac{x^c}{T}\sum_{n\geq 1}\frac{|f(n)|}{n^c}+\left(1+\frac{x\log T}{T}\right)\max_{3x/4\leq n\leq 5x/4}|f(n)|$. 如果 $x\in\mathbb{Z}$, 则公式也成立，只需把最后一项 $f(x)$ 替换为 $f(x)/2$。

证明 Dirichlet 级数 $L_f(s)$ 在紧区间 $[c-iT,c+iT]$ 上绝对且一致收敛。因此 $\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}L_f(s)\frac{x^s}{s}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\sum_{n\geq 1}f(n)\frac{x^s}{ns}\,ds=\sum_{n\geq 1}f(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=\sum_{n\geq 1}f(n)\delta\left(\frac{x}{n}\right)+\sum_{n\geq 1}f(n)\left(I_c\left(\frac{x}{n},T\right)-\delta\left(\frac{x}{n}\right)\right)=\sum_{n\leq x}f(n)+E_c(x,T)$. 这里 $sum_{n\leq x}$ 表示如果 $x\in\mathbb{Z}$, 最后一项 $f(x)$ 替换为 $f(x)/2$。

由 Lemma 4.9，$|E_c(x,T)|\leq 2\sum_{n\geq 1,\,n\neq x}|f(n)|\frac{(x/n)^c}{1+T|\log(x/n)|}+\frac{c}{c+T}|f(x)|$, 其中最后一项只在 $x\in\mathbb{Z}$ 时出现。因此 $|E_c(x,T)|\leq 2x^c\sum_{n\geq 1}\frac{|f(n)|}{n^c(1+T|\log(x/n)|)}+\frac{c}{c+T}|f(x)|$. 特别地，$|E_c(x,T)|\to 0\quad(T\to\infty)$, 于是得到 Theorem 4.10。 □

现在把关于 n 的和分成三部分：$\sum_{|n-x|\geq x/4}(\cdots)+\sum_{2\leq|n-x|\leq x/4}(\cdots)+\sum_{|n-x|<2}(\cdots)=E_c^{(1)}(x,T)+E_c^{(2)}(x,T)+E_c^{(3)}(x,T)$. 对满足 $|n-x|\geq x/4$ 的项，我们用 $|\log(x/n)|\gg 1$, 它给出 $E_c^{(1)}(x,T)\ll\frac{x^c|f(n)|}{n^c(1+T|\log(x/n)|)}\ll\frac{x^c}{T}\sum_{n\geq 1}\frac{|f(n)|}{n^c}$. 对满足 $2\leq|n-x|\leq x/4$ 的项，我们有 $|\log(x/n)|=\left|\log\left(1+\frac{n-x}{x}\right)\right|\gg\frac{|n-x|}{x}$. 因此 $E_c^{(2)}(x,T)\ll\frac{x^c}{T}\sum_{2\leq|n-x|\leq x/4}\frac{|f(n)|}{n^c\frac{|n-x|}{x}}\ll\frac{x}{T}\left(\max_{2\leq|n-x|\leq x/4}|f(n)|\right)\sum_{2\leq|n-x|\leq x/4}\frac{1}{|n-x|}\ll\frac{x\log x}{T}\max_{2\leq|n-x|\leq x/4}|f(n)|$. 最后，剩下的项可以平凡地估计为 $E_c^{(3)}(x,T)\ll\sum_{|n-x|<2}\frac{x^c|f(n)|}{n^c}\ll\max_{|n-x|<2}|f(n)|$. 把这些估计相加即得定理。

5 指数、原根和指标

本章始终把模 n 的可逆剩余类看成群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times=(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. 所谓模 n 存在原根，现代地说就是 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ 是循环群 (cyclic group，循环群)：若 $g\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ 生成 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, 则也称整数 g 是模 n 的原根。这样定义之后，后面的定理本质上都是在讨论 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ 的群结构。

5.1 阶、原根与基本定理.

定理 5.1.1 (二的高次幂没有原根) 若 $k\geq 3$, 则模 2^k 不存在原根。更准确地说，对任意奇数 a, 有 $a^{2^{k-2}}\equiv 1 \pmod{2^k}$.

证明 先证模 8：任意奇数可写成 $2h+1$, 而 $(2h+1)^2=4h(h+1)+1\equiv 1 \pmod 8$。下面对 $k\geq 3$ 归纳。$k=3$ 已证：若 $2^{k-1}|a^{2^{k-3}}-1$, 则 $a^{2^{k-2}}-1=(a^{2^{k-3}}-1)(a^{2^{k-3}}+1)$, 其中第一因子含有 2^{k-1}, 第二因子为偶数，故乘积含有 2^k。于是 $a^{2^{k-2}}\equiv 1 \pmod{2^k}$, 而 $2^{k-2}<\varphi(2^k)$, 所以模 2^k 没有原根。

命题 5.1.2 (幂的阶) 若 $(a,n)=1$, $c\geq 1$, 则 $\delta_n(a^c)=\frac{\delta_n(a)}{(\delta_n(a),c)}$.

命题 5.1.3 (互素阶的乘积) 若 $(a,n)=(b,n)=1$ 且 $(\delta_n(a),\delta_n(b))=1$, 则 $\delta_n(ab)=\delta_n(a)\delta_n(b)$.

注记 5.1.4 若 $\delta_n(a)$ 与 $\delta_n(b)$ 不互素，一般不能写成 $\delta_n(ab)=\mathrm{lcm}(\delta_n(a),\delta_n(b))$。例如模 10 中，3 与 7 的阶都为 4, 但 $3\cdot 7\equiv 1 \pmod{10}$。所以乘积的阶为 2。

定理 5.1.5 (阶的最小公倍数可以达到) 若 $(a,n)=(b,n)=1$, 则存在整数, 使得 $\delta_n(c)=\mathrm{lcm}(\delta_n(a),\delta_n(b))$.

证明 记 $r=\delta_n(a)$, $\quad s=\delta_n(b)$, $\quad L=\mathrm{lcm}(r,s)$, 并写 $L=\prod_q q^{\lambda_q}$. 对每个素数因子而言，在 r, $\quad s$ 中至少有一个含有 q^{λ_q}. 若这个最高幂来自 r, 取 $c_q=a^{r/q^{\lambda_q}}$; 若来自 s, 取 $c_q=b^{s/q^{\lambda_q}}$. 于是 $\delta_n(c_q)=q^{\lambda_q}$. 令 $c=\prod_q c_q$. 这些阶两两互素，由上一命题可知 $\delta_n(c)=\prod_q q^{\lambda_q}=L$. □

命题 5.1.6 (中国剩余定理下的阶) 若 $(n_1,n_2)=1$, $\quad (a,n_1n_2)=1$, 则 $\delta_{n_1n_2}(a)=\mathrm{lcm}(\delta_{n_1}(a),\delta_{n_2}(a))$.

证明 由中国剩余定理 (Chinese remainder theorem，中国剩余定理) $\mathbb{Z}/n_1n_2\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}$ 可知 $a^t\equiv 1 \pmod{n_1n_2}$ 当且仅当 $a^t\equiv 1 \pmod{n_1}$, $\quad a^t\equiv 1 \pmod{n_2}$. 因此满足条件的正整数 t 正是同时被 $\delta_{n_1}(a)$, $\quad \delta_{n_2}(a)$ 整除的正整数. 最小者就是 $\mathrm{lcm}(\delta_{n_1}(a),\delta_{n_2}(a))$. □

推论 5.1.7 若 $(n_1,n_2)=1$, 且分别给定 $(a_1,n_1)=1$, $(a_2,n_2)=1$, 则存在 a 满足 $a\equiv a_1 \pmod{n_1}$, $\quad a\equiv a_2 \pmod{n_2}$, 并且 $\delta_{n_1n_2}(a)=\mathrm{lcm}(\delta_{n_1}(a_1),\delta_{n_2}(a_2))$.

5.2 原根存在定理.

为了统一表述，定义 $\Phi(2^\alpha)=\begin{cases}\varphi(2^\alpha), & 0\leq\alpha\leq 2,\\ \frac{1}{2}\varphi(2^\alpha)=2^{\alpha-2}, & \alpha\geq 3.\end{cases}$ 若 $n=2^\alpha 0\,p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的素因子分解，其中 p_i 为奇素数，则记 $\varepsilon(n)=\mathrm{lcm}(\Phi(2^{\alpha 0}),\varphi(p_1^{\alpha_1}),\ldots,\varphi(p_s^{\alpha_s}))$. 这个数就是群 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ 中元素的阶所能达到的最大值，也就是 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ 的指数.

定理 5.2.1 (模素数存在原根) 若 p 为素数，则 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ 是循环群。等价地，存在模 p 的原根。

引理 5.2.2 (从模 p 提升到模 p^2) 设 p 为奇素数，g 是模 p 的原根。则在 $g,g+p,\ldots,g+(p-1)p$ 中，至少有一个是模 p^2 的原根.

证明 因为每个 $g+tp$ 都模 p 同余于 g, 所以它模 p^2 的阶只能是 $p-1$ 或 $p(p-1)=\varphi(p^2)$. 如果某个 t 使得 $(g+tp)^{p-1}\not\equiv 1 \pmod{p^2}$, 那么 $g+tp$ 就是模 p^2 的原根。

设 $g^{p-1}=1+cp$. 用二项式展开得 $(g+tp)^{p-1}\equiv g^{p-1}+(p-1)g^{p-2}tp\equiv 1+p(c+(p-1)g^{p-2}t) \pmod{p^2}$. 括号中关于 t 的一次式模 p 只有一个零点。因此在 $t=0,1,\ldots,p-1$ 中，至多一个 t 使得 $(g+tp)^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^2}$。于是至少存在一个 t 使 $g+tp$ 为模 p^2 原根。 □

定理 5.2.3 (奇素数幂模原根) 若 p 为奇素数，$\alpha\geq 1$, 则模 p^α 存在原根。更具体地，若 g 是模 p^2 的原根，则 g 是每个模 p^α 的原根。

证明 对 $\alpha=1,2$ 已由前面的定理与引理得到。设 $\alpha\geq 2$, 并假设 g 是模 p^α 的原根。即 $\delta_{p^\alpha}(g)=\varphi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)$. 因为 $g^{\varphi(p^\alpha)}\equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, 可写 $g^{\varphi(p^\alpha)}=1+up^\alpha$. 若 $p\nmid u$, 则 $g^{\varphi(p^\alpha)}\not\equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}}$, 从而模 $p^{\alpha+1}$ 的阶为 $p\varphi(p^\alpha)=\varphi(p^{\alpha+1})$.

只需说明从模 p^2 原根开始，始终有 $p\nmid u$。若某一步 $p|u$, 则 $g^{\varphi(p^\alpha)}\equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}}$. 降到模 p^2 后会推出 $g^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^2}$, 这与 g 为模 p^2 原根矛盾。因此 g 的阶每一步都乘以 p, 故 g 是模 p^α 的原根。 □

推论 5.2.4 若 p 为奇素数，$\alpha\geq 1$, 则模 $2p^\alpha$ 也存在原根.

证明 由中国剩余定理，其环换群为 $\Phi:(\mathbb{Z}/2p^\alpha\mathbb{Z})^\times\to(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$, $[a]_{2p^\alpha}\mapsto([a]_2,[a]_{p^\alpha})$. 由于 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times=\{[1]_2\}$. 复合第二个分量投影得到同构 $\pi:(\mathbb{Z}/2p^\alpha\mathbb{Z})^\times\to(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$, $[a]_{2p^\alpha}\mapsto[a]_{p^\alpha}$. 其反向映射为：给定 $[u]_{p^\alpha}\in(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times$, 取唯一的 $[x]_{2p^\alpha}$ 满足 $x\equiv 1 \pmod 2$, $x\equiv u \pmod{p^\alpha}$, 并令 $\iota([u]_{p^\alpha})=[x]_{2p^\alpha}$. 因此若 $[g]_{p^\alpha}$ 是生成元，则 $\iota([g]_{p^\alpha})$ 是 $(\mathbb{Z}/2p^\alpha\mathbb{Z})^\times$ 的生成元，即给出模 $2p^\alpha$ 的原根.

定理 5.2 (区别模素数幂的关键判别) 设 n 为奇素数，$\alpha\geq 1$, 则 $2,4,p^\alpha,2p^\alpha$ 之一，其中 p 为奇素数，$\alpha\geq 1$。

证明 充分性已经证明：1,2,4 的情形直接；奇素数幂与其二倍由上面的定理和推论得到。

下面证明必要性：若 $2^\alpha|n$ 且 $\alpha\geq 3$,

$\frac{S(N)}{N^{\lambda}}\longrightarrow 0\qquad (N\to\infty)$，并且积分收敛。因此 $L(s,\chi)=s\int_0^{\infty}\frac{S(y)}{y^{s+1}}dy$. 又因为 $|S(y)|\le k$，这个积分在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 中收敛，所以它定义了一个解析函数。

8 Dirichlet 定理与算术级数中的素数

我们想证明下面的结果。

定理 8.0.1 (Dirichlet) 对所有 $1\le a\le k$，若 $(a,k)=1$，则存在无穷多个素数 $p\equiv a\pmod k$.

首先回忆 Euler 对素数无穷性的证明。对 $\mathrm{Re}(s)>1$，$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$. 于是对实数 $s>1$，$\log\zeta(s)=-\sum_p\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\sum_p\sum_{\ell\ge1}\frac{1}{\ell p^{\ell s}}=\sum_p\frac{1}{p^s}+O\left(\sum_p\sum_{\ell\ge2}\frac{1}{p^{\ell s}}\right)$. 这里，当 $s>1$ 时，$\sum_p\sum_{\ell\ge2}\frac{1}{p^{\ell s}}\le\sum_p\sum_{\ell\ge2}\frac{1}{p^{\ell}}\ll\sum_p\frac{1}{p(p-1)}\ll1$. 所以 $\log\zeta(s)=\sum_p\frac{1}{p^s}+O(1)$. 因为 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 处有极点，所以当 $s\to1^+$ 时，$\log\zeta(s)\to+\infty$，从而 $\sum_p\frac{1}{p^s}\to+\infty$. 这说明素数有无穷多个。

为了证明 Dirichlet 定理，我们使用类似的想法，并且想说明 $\sum_{p\equiv a\pmod k}\frac{1}{p^s}\longrightarrow+\infty\qquad(s\to1^+)$. 为了选出素数所在的既约剩余类 $p\equiv a\pmod k$，我们使用 Dirichlet 特征的正交性：$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi\bmod k}\chi(\overline{a}p)=\begin{cases}1, & p\equiv a\pmod k,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$ 于是 $\sum_{p\equiv a\pmod k}\frac{1}{p^s}=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_p\frac{1}{p^s}\sum_{\chi\bmod k}\chi(\overline{a})\chi(p)=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi\bmod k}\overline{\chi}(a)\sum_p\frac{\chi(p)}{p^s}$.

当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时，$L(s,\chi)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$. 因此对实数 $s>1$，$\log L(s,\chi)=-\sum_p\log\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)+2\pi i\,m$. 通过取实数 $s\to+\infty$，得到 $m=0$. 于是 $\log L(s,\chi)=-\sum_p\log\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)=\sum_p\sum_{\ell\ge1}\frac{\chi(p)^{\ell}}{\ell p^{\ell s}}=\sum_p\frac{\chi(p)}{p^s}+O(1)$. 所以 $\sum_{p\equiv a\pmod k}\frac{1}{p^s}=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi\bmod k}\overline{\chi}(a)(\log L(s,\chi)+O(1))=\frac{1}{\varphi(k)}\log L(s,\chi_0)+\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi}(a)\log L(s,\chi)+O(1)$.

回忆：当 $s\to1^+$ 时，$L(s,\chi_0)$ 在 $s=1$ 处有极点，留数为 $\varphi(k)/k$，特别地，$\log L(s,\chi_0)\to+\infty\qquad(s\to1^+)$. 为了说明 $\sum_{p\equiv a\pmod k}\frac{1}{p^s}\to+\infty$，因此只需证明：当 $\chi\ne\chi_0$ 时，$\log L(s,\chi)$ 在 $s\to1^+$ 时有界。

又因为当 $\chi\ne\chi_0$ 时，$L(s,\chi)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 中解析，所以我们可以取极限 $s\to1^+$。因此这等价于证明 $L(1,\chi)\ne0$.

定理 8.0.2 (Dirichlet L-函数的非零性) 若 $\chi\ne\chi_0$，则 $L(1,\chi)\ne0$.

我们把证明分成两种情形：或者 $\chi\ne\overline{\chi}$，或者 χ 是实特征。

引理 8.0.3 对所有实数 $x>1$，$\prod_{\chi\bmod k}L(s,\chi)\ge1$.

证明 只需说明 $\log\prod_{\chi\bmod k}L(s,\chi)\ge0$. 由 Euler 乘积，$\log\prod_{\chi\bmod k}L(s,\chi)=\sum_{\chi\bmod k}\sum_p-\log\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)=\sum_{\chi\bmod k}\sum_p\sum_{\ell\ge1}\frac{\chi(p)^{\ell}}{\ell p^{\ell s}}=\sum_p\sum_{\ell\ge1}\frac{1}{\ell p^{\ell s}}\sum_{\chi\bmod k}\chi(p^{\ell})$. 而 $\sum_{\chi\bmod k}\chi(p^{\ell})$ 要么等于 0，要么等于 $\varphi(k)$。因此 $\log\prod_{\chi\bmod k}L(s,\chi)=\varphi(k)\sum_p\sum_{\substack{\ell\ge1\\ p^{\ell}\equiv1\pmod k}}\frac{1}{\ell p^{\ell s}}\ge0$，这里 s 是实数。于是 $\prod_{\chi\bmod k}L(s,\chi)\ge1$.

引理 8.0.4 至多存在一个非主特征 χ 使得 $L(1,\chi)=0$.

证明 假设存在 $\chi_1\ne\chi_2$，使得 $L(1,\chi_1)=L(1,\chi_2)=0$. 则 $\prod_{\chi\bmod k}L(s,\chi)=L(s,\chi_0)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)\prod_{\chi\ne\chi_0,\chi_1,\chi_2}L(s,\chi)$. 因为对 $\chi\ne\chi_0,\chi_1,\chi_2$，$L(s,\chi)$ 是 $\mathrm{Re}(s)>0$ 中的解析函数，所以当 $s\to1^+$ 时，$\prod_{\chi\ne\chi_0,\chi_1,\chi_2}L(s,\chi)$ 有界。又因为 $L(s,\chi_0)$ 在 $s=1$ 处有一阶极点，而 $L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)$ 至少有二阶零点，所以当 $s\to1^+$ 时，$\prod_{\chi\bmod k}L(s,\chi)\to0$. 这与上一个引理矛盾。

现在我们来证明 $L(1,\chi)\ne0$. 考虑 $\sigma_{\chi}(n)=(u*\chi)(n)=\sum_{d|n}\chi(d)$. 我们将用两种不同方式估计部分和 $\sum_{n\le x}\frac{\sigma_{\chi}(n)}{n^{1/2}}$.

第一种方法是 Dirichlet 双曲线法（Dirichlet hyperbola method）。有 $\sum_{n\le x}\frac{\sigma_{\chi}(n)}{n^{1/2}}=\sum_{ab\le x}\frac{\chi(a)}{(ab)^{1/2}}$. 于是 $\sum_{ab\le x}\frac{\chi(a)}{(ab)^{1/2}}=\sum_{a\le\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\sum_{b\le x/a}\frac{\chi(b)}{\sqrt{b}}\quad+\sum_{b\le\sqrt{x}}\frac{\chi(b)}{\sqrt{b}}\sum_{\sqrt{x}<a\le x/b}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}$. 下面估计第一项。由 Abel 求和，对 $u_1<a\le y_2$ 有 $\sum_{y_1<a\le y_2}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}=\frac{1}{y_2^{1/2}}\sum_{u_1<a\le y_2}\chi(a)-\frac{1}{y_1^{1/2}}\sum_{u_1<a\le y_1}\chi(a)\quad+\sigma\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{x^{3/2}}\left(\sum_{u_1<a\le x}\chi(a)\right)dx$. 利用 $\left|\sum_{a\le k}\chi(a)\right|\le k$，得到 $\sum_{y_1<a\le y_2}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\ll\frac{1}{y_1^{1/2}}+\frac{1}{y_2^{1/2}}$. 特别地，$\sum_{\sqrt{x}<a\le x/b}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\ll\frac{1}{x^{1/4}}+\frac{b^{1/2}}{x^{1/2}}$. 因此第二项满足 $\sum_{b\le\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{\sqrt{x}<a\le x/b}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\ll\sum_{b\le\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{b}}\left(\frac{1}{x^{1/4}}+\frac{b^{1/2}}{x^{1/2}}\right)\ll1$.

另一方面，由 Euler–Maclaurin 公式，$\sum_{b\le y}\frac{1}{\sqrt{b}}=2y^{1/2}+c+O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$. 所以 $\sum_{b\le x/a}\frac{1}{\sqrt{b}}=2\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2}+c+O\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)$. 于是第一项等于 $\sum_{a\le\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2}+c+O\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)\right]=2x^{1/2}\sum_{a\le\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{a}+c\sum_{a\le\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}+O(1)$. 由 Abel 求和和 $\sum_{a\le\xi}\chi(a)$ 有界，得到 $\sum_{a\le\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{\sqrt{a}}=O(1)$，并且 $\sum_{a\le\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{a}=L(1,\chi)+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. 因此 $\sum_{n\le x}\frac{\sigma_{\chi}(n)}{n^{1/2}}=2x^{1/2}L(1,\chi)+O(1)$. 也就是说，我们已经证明 $\sum_{n\le x}\frac{\sigma_{\chi}(n)}{n^{1/2}}=2x^{1/2}L(1,\chi)+O(1)$. (*2) 这里还用到了 $sum_{a>\sqrt{x}}\frac{\chi(a)}{a}\ll\frac{1}{\sqrt{x}}$，这得由引理 8.0.3 的结果。

第二种方法是直接估计 $\sum_{n\le x}\frac{\sigma_{\chi}(n)}{n^{1/2}}$. 若 $p\nmid k$，则 $\sigma_{\chi}(p^{\ell})=\sum_{d|p^{\ell}}\chi(d)=\chi(1)=1$. 若 $p\nmid k$，则 $\sigma_{\chi}(p^{\ell})=\sum_{d|p^{\ell}}\chi(d)=\sum_{i=0}^{\ell}\chi(p)^i$. 因为 χ 是实特征，所以 $\chi(p)=\pm1$。于是 $\sigma_{\chi}(p^{\ell})=\begin{cases}\ell+1, & \chi(p)=1,\\ 1, & \chi(p)=-1\ \text{且}\ \ell\ \text{为偶数},\\ 0, & \chi(p)=-1\ \text{且}\ \ell\ \text{为奇数}.\end{cases}$ 特别地，$\sigma_{\chi}(p^{\ell})\ge0,\qquad\sigma_{\chi}(p^{\ell})\ge1$ 若 ℓ 为偶数. 因此 $\sigma_{\chi}(m^2)\ge1$. 这是因为若 $p^{\ell}\mid m^2$，则 ℓ 为偶数。于是 $\sum_{n\le x}\frac{\sigma_{\chi}(n)}{n^{1/2}}\ge\sum_{m^2\le x}\frac{\sigma_{\chi}(m^2)}{m}\ge\sum_{m\le\sqrt{x}}\frac{1}{m}\gg\log x$. 这与 (*2) 合在一起给出 $\log x\ll\sum_{n\le x}\frac{\sigma_{\chi}(n)}{n^{1/2}}=2x^{1/2}L(1,\chi)+O(1)$. 从而必有 $L(1,\chi)>0$.

9 Gamma 函数

定义 9.0.1 (Gamma 函数（Gamma function）） Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 定义为 $\frac{1}{\Gamma(s)}=se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-s/n}$，其中 γ 是 Euler 常数（Euler's constant）。

注记 9.0.2 无穷乘积对所有 $s\in\mathbb{C}$ 绝对收敛。事实上 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1-\frac{s}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)<\infty$. 并且这个收敛在 $\mathbb{C}$ 的紧集上一致。因此右边定义了 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数。由定义可以看出，$\Gamma(s)$ 在复平面上解析，除了在 $s=0,-1,-2,\ldots$ 处有单极点。

定理 9.0.3 (Euler 公式；原文 Theorem 7.1) 有 $\frac{1}{\Gamma(s)}=s\lim_{m\to\infty}m^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)$. 等价地，$\frac{1}{\Gamma(s)}=s\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-s}(1+\frac{s}{n})$.

证明 由 $\gamma=\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m)$，可得 $\frac{1}{\Gamma(s)}=s\lim_{m\to\infty}e^{s(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\log m)}\prod_{n=1}^{m}(1+\frac{s}{n})e^{-s/n}=s\lim_{m\to\infty}m^{-s}\prod_{n=1}^{m}(1+\frac{s}{n})$. 又因为 $m^{-s}=\prod_{n=1}^{m-1}(1+\frac{1}{n})^{-s}$，所以 $\frac{1}{\Gamma(s)}=s\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})\prod_{n=1}^{m-1}(1+\frac{1}{n})^{-s}(1+\frac{s}{n})$，从而得到第二个乘积公式。

由上式容易看出下面的推论。

推论 9.0.4 (原文 Corollary 7.2) 对 $s\notin\{0,-1,-2,\ldots\}$，有 $\Gamma(s)=\lim_{m\to\infty}\frac{m!m^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}$.

定理 9.0.5 (函数方程；原文 Theorem 7.3) 对所有 $s\in\mathbb{C}$，在等式两侧有定义时，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.

证明 由上一个推论，$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)}=\lim_{m\to\infty}\frac{m^{s+1}m!}{(s+1)(s+2)\cdots(s+m+1)}\frac{s(s+1)\cdots(s+m)}{m^s m!}$. 因此 $\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)}=s\lim_{m\to\infty}\frac{m}{s+m+1}=s$. 于是 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.

因为 $\Gamma(1)=1$，所以由函数方程得到 $\Gamma(n+1)=n!,\qquad n\in\mathbb{N}$.

引理 9.0.6 (倍无公式；原文 Corollary 7.4) 对 $n\in\mathbb{N}$，有 $\Gamma(2n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

引理 9.0.7 (反射公式；原文 Theorem 7.5) 对 $s\notin\mathbb{Z}$，有 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$.

条件性证明 函数 $\sin\pi s$ 是整函数（entire function），并且在 $s=0,\pm1,\pm2,\ldots$ 处有一阶零点。由 Hadamard 分解，有 $\sin\pi s=se^{as+b}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)$. 由此可得 $\frac{\pi}{\sin\pi s}=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)^{-1}$. 另一方面，由 Euler 乘积公式可得 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{s^2}{n^2})^{-1}$. 因此 $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}$.

作为推论，有 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

引理 9.0.8 (积分公式；原文 Theorem 7.6) 当 $\mathrm{Re}(s)>0$ 时，$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt$.

证明 积分 $\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt$ 在 $\mathrm{Re}(s)>0$ 上一致收敛于紧集，因此它在半平面 $\mathrm{Re}(s)>0$ 中定义解析函数。

考虑 $T(s,n)=\int_0^n(1-\frac{t}{n})^nt^{s-1}dt$. 作变量替换 $t=nx$，得到 $T(s,n)=n^s\int_0^1(1-x)^nx^{s-1}dx$. 反复分部积分可得 $T(s,n)=n^s\frac{n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}$. 由 Corollary 7.2 得到 $\lim_{n\to\infty}T(s,n)=\Gamma(s)$.

现在只需说明 $\int_0^{\infty}e^{-t}t^{s-1}dt-\lim_{n\to\infty}\int_0^n(1-\frac{t}{n})^nt^{s-1}dt=0$. 对 $t\ge0$ 和 $n\in\mathbb{N}$，有 $(1+\frac{t}{n})^ne^t$，$\left(1-\frac{t}{n}\right)^ne^t\le e^{-t}\quad(0\le t\le n)$. 并且可写成 $0\le1-e^t(1-\frac{t}{n})^n\le\frac{t^2}{n}$. 由此可控制差值，并令 $n\to\infty$，便得到所需等式。

定理 9.0.9 (Stirling 公式；原文 Theorem 7.7) 设 $\delta>0$。当 $|s|\to\infty$ 且 $|\arg s|\le\pi-\delta$ 时，有 $\log\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s+\frac{\log 2\pi}{2}+O_{\delta}\left(\frac{1}{|s|}\right)$.

证明 由 Euler 乘积公式，在 $|\arg s|<\pi$ 时，$\log\Gamma(s)=-\log s+\sum_{n=1}^{\infty}\left(s\log\frac{n+1}{n}-\log\left(1+\frac{s}{n}\right)\right)$. 由 Abel 求和，$\sum_{n=1}^{N}\log\left(1+\frac{s}{n}\right)=\log(1+s)+\int_1^N\log\left(1+\frac{s}{u}\right)d\lfloor u\rfloor$. 记 $\{u\}=u-\frac{1}{2}+\rho(u)$，$\quad\rho(u)=\frac{1}{2}-\{u\}$. $\sum_{n=1}^{N}\log\left(1+\frac{s}{n}\right)=\log(1+s)+\int_1^N\log\left(1+\frac{s}{u}\right)du\quad-\frac{1}{2}\int_1^N\log\left(1+\frac{s}{u}\right)du+\int_1^N\log\left(1+\frac{s}{u}\right)d\rho(u)$. 将这些项代回去，并对含有 $\rho(u)$ 的项分部积分。由于 $\int_1^N\rho(u)du\ll1$，可得 $\int_1^N\frac{\rho(u)}{u+s}du=O_{\delta}\left(\frac{1}{|s|}\right)$ 在区域 $|\arg s|\le\pi-\delta$ 中成立。于是整理可得 $\log\Gamma(s)=\left(s-\frac{1}{2}\right)\log s-s+C+O_{\delta}\left(\frac{1}{|s|}\right)$. 最后，利用 $s=n,n+\frac{1}{2},2n$ 并结合倍元公式，可以看出常数为 $C=\frac{\log 2\pi}{2}$. 从而得到 Stirling 公式。

推论 9.0.10 (原文 Corollary 7.8) 设 $\alpha\le\sigma\le\beta$，当 $|t|\to\infty$ 时，$\Gamma(\sigma+it)=\sqrt{2\pi}|t|^{\sigma+it-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|-it+\frac{\pi i}{2}(\sigma-\frac{1}{2})\mathrm{sgn}(t)}\left(1+O_{\alpha,\beta}\left(|t|^{-1}\right)\right)$. 这里隐含常数依赖于 α,β.

证明 由 Stirling 公式可得，写 $s=\sigma+it$，当 $|t|\to\infty$ 时，$\log s=\log|t|+\log\left(1+\frac{i\sigma}{t}\right)=\frac{\pi i}{2}\mathrm{sgn}(t)+\log|t|+\frac{i\sigma}{t}+O\left(|t|^{-2}\right)$. 代入 Stirling 公式后整理，即得所需渐近式。这里还用到 $e^{O(|t|^{-1})}=1+O(|t|^{-1})$.

推论 9.0.11 (原文 Corollary 7.9) 若 $s=\sigma+it$ 且 $|\arg s|\le\pi-\delta$，则 $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)=\log s-\frac{1}{2s}+O_{\delta}\left(\frac{1}{|s|^2}\right)$.

证明 练习。

10 Riemann ζ-函数

10.1 函数方程

由 Euler–Maclaurin 公式，我们有 $\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+1-s\int_1^{\infty}\frac{\rho(\xi)}{\xi^{s+1}}d\xi$，这给出了 $\zeta(s)$ 到半平面 $\mathrm{Re}(s)>0$ 的亚纯延拓。

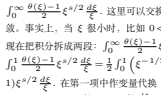
定理 10.1.1 (原文 Theorem 8.1) Riemann ζ-函数可以至纯纯延拓到整个复平面，并且满足函数方程 $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$. 它唯一的极点在 $s=1$，且为留数等于 1 的单极点。

注记 10.1.2 证明中的关键工具是 Poisson 求和公式（Poisson summation formula）。有时我们把整化的 Riemann ζ-函数 (completed Riemann zeta function) 记为 $\zeta^*(s):=s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$，那么 $\zeta^*(s)$ 是整个函数，并且满足函数方程 $\zeta^*(s)=\zeta^*(1-s)$.

定理 10.1.3 (Poisson 求和公式；原文 Theorem 8.2) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 满足：对所有 $A\in\mathbb{N}$，$f(x)\ll|x|^{-A}$. 则 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)$，其中 Fourier 变换（Fourier transform）定义为 $\widehat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-2\pi i y\xi}d\xi$.

引理 10.1.4 (原文 Lemma 8.3) 对所有 $x>0$，有 $\theta(x)=\frac{1}{x}\theta\left(\frac{1}{x}\right)$.

证明 函数 $f(\xi)=e^{-\pi x\xi^2}$ 满足 Poisson 求和公式的假设。因此 $\theta(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)$. 下面计算 Fourier 变换：$\widehat{f}(n)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x\xi^2-2\pi i n\xi}d\xi=e^{-\pi n^2/x}\int_{\mathbb{R}+i n/x}e^{-\pi x z^2}dz$. 为了把积分路径平移回实轴，考虑如下矩形围道：



在两个竖直边上的积分满足估计 $i\int_0^{n/x}e^{-\pi x(-S+iy)^2}dy+i\int_{n/x}^0e^{-\pi x(S+iy)^2}dy\ll\frac{n}{x}e^{-\pi xS^2+\pi n^2/x}\longrightarrow0\qquad(S\to\infty)$. 于是令 $S\to\infty$，得到 $\int_{\mathbb{R}+i n/x}e^{-\pi x z^2}dz=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi x\xi^2}d\xi=\frac{1}{\sqrt{x}}$. 因此 $\widehat{f}(n)=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\pi n^2/x}$. 代入 Poisson 求和公式，即得 $\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right)$.

Theorem 8.1 的证明 先设 $\mathrm{Re}(s)>1$。由 Gamma 函数的积分公式，$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2\xi}\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}=\int_0^{\infty}\frac{\theta(\xi)-1}{2}\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}$. 这里可以交换求和与积分的次序，因为当 $\xi>0$ 时 $\theta(\xi)$ 绝对收敛。注意右端积分只有在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时收敛。事实上，当 ξ 很小时，比如 $0<\xi<1$，有 $\theta(\xi)-1\ll\xi^{-1/2}$，而 $\int_0^1\xi^{-1/2}\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}$ 只在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时收敛。

现在把积分拆成两段：$\int_0^{\infty}\frac{\theta(\xi)-1}{2}\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}=\int_1^{\infty}\frac{\theta(\xi)-1}{2}\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}+\int_0^1\frac{\theta(\xi)-1}{2}\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}$. 在 Lemma 8.3，第一项可以写成 $\int_1^{\infty}\frac{\theta(\xi)-1}{2}\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left(\xi^{-1/2}\theta\left(\frac{1}{\xi}\right)-1\right)\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\xi^{-1/2}\left(\theta\left(\frac{1}{\xi}\right)-1\right)\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}\qquad+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\xi^{-1/2}-1)\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}$. 在第一项中作变量代换 $u=1/\xi$，得到 $\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\xi^{-1/2}\left(\theta\left(\frac{1}{\xi}\right)-1\right)\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\theta(u)-1)u^{(1-s)/2}\frac{du}{u}$. 另一方面，$\frac{1}{2}\int_1^{\infty}(\xi^{-1/2}-1)\xi^{s/2}\frac{d\xi}{\xi}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}$. 总之得到 $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}\qquad+\int_0^{\infty}\frac{\theta(\xi)-1}{2}\left(\xi^{s/2}+\xi^{(1-s)/2}\right)\frac{d\xi}{\xi}$. (8.2) 这里注意，右端的积分对所有 $s\in\mathbb{C}$ 都收敛。因此右端定义了一个亚纯函数，从而给出了 $\zeta(s)$ 到整个复平面的亚纯延拓。其过程 (8.2) 在把 s 替换成 $1-s$ 时保持不变，于是得到函数方程 $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$. 至于 $\zeta(s)$ 的极点，我们已经看出它在半平面 $\mathrm{Re}(s)>0$ 中的唯一极点是 $s=1$，而且这是一个单极点。再由函数方程以及 $\Gamma(s)$ 在 $s=0$ 有一个单极点这个事实，可以看出 $\zeta(s)$ 在 $\mathbb{C}$ 中除 $s=1$ 以外没有其他极点。

注记 10.1.5 由 Gamma 函数的性质，函数方程也可以写成 $\zeta(1-s)=\chi(s)\zeta(s),\qquad\chi(s)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}$，或者等价地写成 $\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$. 由于 $\Gamma(s)$ 与 $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时都不为零，上面的恒等式说明 $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)<0$ 中的零点恰好是 $s=-2,-4,-6,\ldots$，这些称为平凡零点（trivial zeroes）。所有其他零点都位于带状区域 $0\le\mathrm{Re}(s)\le1$，这个区域称为临界带（critical strip）。

10.2 一阶整函数

本节的目标是把 ζ-函数表达成由它的零点指标化的无穷乘积。这将为 Hadamard 分解（Hadamard factorization）。下面这种分解对一类更一般的全纯函数有效，我们先为一般全纯函数建立定理，然后再应用到特殊情形 $\zeta^*(s)$。

10.2.1 复分析中的一个定理.

复分析中一个熟知的定理说，所有满足 $f(s)\ll|s|^{\alpha}$ 的整函数（entire function）其实都是多项式，而且次数至多为 α。下面的引理给出我们需要的形式。

引理 10.2.1 (原文 Lemma 9.1) 设 $C,\alpha>0$ 为实常数。如果 g 是一个整函数，并且对所有 $s\in\mathbb{C}$ 满足 $\mathrm{Reg}(s)\le C(1+|s|^{\alpha})$，(9.1) 那么 g 是次数至多为 α 的多项式。

注记 不妨假设 g 在 $s=0$ 消失，否则把 $g(s)$ 换成 $g(s)-g(0)$。把 g 写成 Taylor 级数 $g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+ib_n)s^n$，其中 $a_n,b_n\in\mathbb{R}$。这个级数在整个复平面上收敛。使用极坐标 $s=re^{2\pi i\theta}$，则实部有限 $\mathrm{Re}(re^{2\pi i\theta})=\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\cos(2\pi n\theta)-\sum_{n=1}^{\infty}b_nr^n\sin(2\pi n\theta)\ge r^n\cdot\begin{cases}3, & n=\ell\ne0,\\ 1, & n\ne\ell=0,\\ 0, & n=\ell=0,\end{cases}$ 以及相应的正弦正交关系。将上式乘以 $\cos(2\pi\ell\theta)$ 并在区间 $\theta\in[0,1]$ 上积分，可得 $a_{\ell}r^{\ell}=2\int_0^1\mathrm{Re}(re^{2\pi i\theta})\cos(2\pi\ell\theta)d\theta$. 这里还用到 $g(0)=0$ 以及实部的平均值性质：$\int_0^1\mathrm{Re}(re^{2\pi i\theta})d\theta=\mathrm{Re}g(0)=0$. 因此由上界 (9.1)，$\int_0^1|\mathrm{Re}(re^{2\pi i\theta})|d\theta=2\int_0^1\max\{0,\mathrm{Re}(re^{2\pi i\theta})\}d\theta\ll1+r^{\alpha}$. 于是 $|a_{\ell}|\le\frac{2}{r^{\ell}}\int_0^1|\mathrm{Re}(re^{2\pi i\theta})|d\theta\ll r^{\alpha-\ell}$. 今 $r\to\infty$，当 $\ell>\alpha$ 时得到 $a_{\ell}=0$。同样地，乘以 $\sin(2\pi\ell\theta)$ 并积分，可以得到 $b_{\ell}=0$。因此当 $\ell>\alpha$ 时所有系数都为零，故 g 是次数至多为 α 的多项式。

定义 10.2.2 (有限阶函数) 设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为整函数。如果存在常数 $\alpha>0$，使得对所有 $s\in\mathbb{C}$ 都有 $f(s)=O(\exp(|s|^{\alpha}))$，则称 f 是有限阶（finite order）的。

定义 10.2.3 (阶) 如果整函数 f 是有限阶的，则数 $\inf\{\alpha>0:f(s)\ll\exp(|s|^{\alpha})\}$ 称为 f 的阶（order）。

如果一个有限阶函数在 $\mathbb{C}$ 上没有零点，那么它有非常特殊的形式。

引理 10.2.4 (原文 Lemma 9.2) 设 f 是有限阶整函数，并且在 $\mathbb{C}$ 上处处不为零。那么 $f(s)=\exp(g(s))$，其中 g 是一个多项式。

更精确地，g 的次数至多为 β 的阶。

证明 因为 f 在 $\mathbb{C}$ 上没有零点，所以可以选取一个全纯的 $\log f(s)$。设 $g(s)=\log f(s)$。若 f 的阶为 α，则对任意 $\varepsilon>0$，$\mathrm{Re}g(s)=\log|f(s)|\ll|s|^{\alpha+\varepsilon}$. 由 Lemma 9.1 的证明同样可以推出 g 是多项式；令 $\varepsilon\to0$，可知 g 的次数至多为 α。

现在我们需要研究常数项的有限阶函数。下面的定理给出阶与零点分布之间的关系。

引理 10.2.5 (Jensen 公式；原文 Theorem 9.3) 设 $R>0$。设 f 在圆盘 $|s|\le R$ 的某个开域中全纯，并且 f 在 $s=0$ 处不为零，在圆周 $|s|=R$ 上也不为零。那么 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|d\theta=\log|f(0)|+\sum_{\rho}\log\frac{R}{|\rho|}$，其中 ρ 遍历 f 在 $|\rho|<R$ 中的零点，并按重数计算。

证明 把 f 分解为 $f(s)=\widehat{f}(s)\prod_{\rho}(s-\rho)$，其中 ρ 遍历圆盘 $|s|<R$ 中的零点，并按重数计算；而 $\widehat{f}$ 在 $|s|\le R$ 上全纯且不为零。于是 $\log|f(s)|=\log|\widehat{f}(s)|+\sum_{\rho}\log|s-\rho|$. 因此只需处理下面两种情形。

第一，如果 f 在 $|s|\le R$ 中没有零点，那么 $\log|f(s)|$ 是全纯函数。由 Cauchy 公式，$\log|f(0)|=\mathrm{Re}\log f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\log f(Re^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|d\theta$.

第二，考虑 $f(s)=s-\xi$，其中 $|\xi|<R$。写 $f(s)=f_1(s)f_2(s)$，$\quad f_1(s)=\frac{s-\xi}{R^2-\overline{\xi}s}$，$\quad f_2(s)=R^2-\overline{\xi}s$. 当 $|s|=R$ 时，$|f_1(s)|=\frac{R}{|s-\xi|}$. 于是，在圆盘中没有零点，那么第一种情形，$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f_2(Re^{i\theta})|d\theta=\log|f_2(0)|=\log R^2$. 合并起来得到 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|Re^{i\theta}-\xi|d\theta=-\log R+\log R^2=\log R$. 把这两个情形代回上面的分解，即得 Jensen 公式。

作为 Jensen 公式的推论，我们有下面的零点计数估计。

**定理

Exercise Sheet 1

Exercise 1. $\pi(x) \geq \log\log x$. pf: $p_{n+1} \leq p_1 \cdots p_n + 1$，归纳，$p_n \leq 2^{2^{n-1}} \leq e^{e^{n-1}}$，取对数。

Exercise 2. (a) $\tau(n^2) = \sum_{d|n} \mu(d)\tau(n/d)^2$; (b) $\sum_{d^k|n} \mu(d) = 1_{\text{无k次方因子}}$; (c) $\mu(n) = \sum_{1\leq a\leq n,(a,n)=1} e^{2\pi i a/n}$. (a) pf: $\tau(\cdot^2) = \mu * \tau(\cdot)^2$，只需 $\tau(\cdot)^2 = \tau(\cdot^2) * u$，显。(b) pf: 最大 k 次方因子设为 $p_1^{k\alpha_1}\cdots p_m^{k\alpha_m}$，若为 1，则 LHS= 1，否则为 $\sum_{d|p_1\cdots p_m}\mu(d) = 0$。(c) pf: 先证 RHS 可乘，因为 m, n 互素时，在模 mn 意义下 $\{am + bn \mid a \in (\mathbb{Z}/n)^\times,\ b \in (\mathbb{Z}/m)^\times\} = (\mathbb{Z}/mn)^\times$，再说 p^α 时 LHS=RHS（用 p 进制）。

Exercise 3. (a) $\sum_{d|n}\mu(d)^2 = 2^{\omega(n)}$; (b) $\sum_{d|n}\mu(d)\tau(d) = (-1)^{\omega(n)}$. (a) pf: 显。(b) pf: LHS= $\sum_{k=0}^{\omega(n)}\binom{\omega(n)}{k}(-1)^k 2^k = (1-2)^{\omega(n)} = (-1)^{\omega(n)}$。

Exercise 4. f 可乘，则 f^{-1} 完全可乘 iff $f(p^\ell) = 0,\ \ell \geq 2$. pf: 已知可乘则完全可乘等价于 $f^{-1} = \mu f$ 故显。

Exercise 5. $\{f : f * f = u\}$ 恰有两个，是否可乘？ pf: f 满足 $f(1) = \pm 1$，递推 $f(n) = \frac{1}{2f(1)}(1 - \sum_{d|n,\, d\neq 1,n} f(d)f(n/d))$，该递推确定，故恰有两个。若 $f(1) = -1$ 不可乘；$f(1) = 1$ 可乘（用反证法找最小的 mn）。

Exercise 6. $(f * g)^{-1} = f^{-1} * g^{-1}$. 显。

Exercise 7. $\operatorname{supp}\Lambda_k \subseteq \{n : \omega(n) \leq k\}$; $0 \leq \Lambda_k(n) \leq (\log n)^k$. ① pf: $\Lambda_k = \Lambda_{k-1}\log + \Lambda_{k-1} * \Lambda$，故显。② $\Lambda \geq 0$，是因为递推式，“$\leq$” 是因为 $\log^k = \Lambda_k * u \Rightarrow \Lambda_k(n) = \log^k n - \sum_{d|n,\, d<n}\Lambda_k(d) \leq \log^k n$。

Exercise Sheet 2

Exercise 1. 求 $f \in A$ s.t. $\frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{d|n}\frac{1}{d}f(n/d)$. pf: $a(n) = 1/n$ 有 $a^{-1}(n) = \mu(n)/n$，故 $f = \frac{1}{\varphi} * a^{-1}$ 可乘，$f(p) = \frac{1}{p(p-1)}$，$f(p^\alpha) = 0\ (\alpha \geq 2)$，故 $f(n) = \mu(n)^2\prod_{p|n}\frac{1}{p(p-1)} = \frac{\mu(n)^2}{n\varphi(n)}$。

Exercise 2. $\sum_{n\leq x}\frac{1}{\varphi(n)} = C_1\log x + C_2 + O(\log x/x)$. pf: $\sum_{n\leq x}\frac{1}{\varphi(n)} = \sum_{n\leq x} a * f(n) = \sum_{d\leq x} f(d)\sum_{m\leq x/d}\frac{1}{m} = \sum_{d\leq x} f(d)(\log\frac{x}{d} + \gamma + O(d/x)) := \log x\sum_{d\geq 1} f(d) + (-\sum_{d\geq 1} f(d)\log d + \gamma\sum_{d\geq 1} f(d)) - \log x\sum_{d>x} f(d) - (-\sum_{d>x} f(d)\log d + \gamma\sum_{d>x} f(d)) + O(\sum_{d\leq x} f(d)d/x)$。由以下估计可证原题：① $\sum_{d\geq 1} f(d)$，$\sum_{d\geq 1} f(d)\log d$ 收敛。pf: $\varphi(n) \gg n/\log\log n$（由此也可知 $\sum_{n\leq x} 1/\varphi(n) = O(\log x)$）。② $\sum_{d\leq x} f(d)d = O(\log x)$。pf: $|\sum_{d\leq x} f(d)d| = |\sum_{d\leq x}\mu(d)^2/\varphi(d)| \leq |\sum_{d\leq x} 1/\varphi(d)| = O(\log x)$。③ $\sum_{d>x} f(d) = O(1/x)$。pf: $f(d) = d^{-2}\mu(d)^2 d/\varphi(d)$，记为 $d^{-2}b(d)$，由 2-1，$\frac{n}{\varphi(n)} = n\, a * f(n) = n\sum_{d|n}\frac{d\mu^2(d)}{n\, d\varphi(d)} = \sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$，即 $|b(n)| \leq n/\varphi(n) = \sum_{d|n}\mu^2(d)/\varphi(d)$，那 $|\sum_{n\leq x} b(n)| \leq \sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\mu^2(d)/\varphi(d) = \sum_{d\leq x}\frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}[x/d] \leq x\sum_{d\leq x}\frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} = x\sum_{d\leq x} f(d) = O(x)$，即 $\sum_{d>x} f(d) = \lim_{N\to\infty}\sum_{x<d\leq N}\frac{b(d)}{d^2} = \lim_{N\to\infty}\int_x^N\frac{1}{\xi^2}d\sum_{x<d\leq\xi} b(d) = \lim_{N\to\infty}[O(1/N) - 2\int_x^N \xi^{-3}\sum_{x<d\leq\xi} b(d)d\xi] = 2\int_x^\infty \xi^{-3}O(\xi)d\xi = O(1/x)$。④ $\sum_{d>x} f(d)\log d = O(\log x/x)$。pf: LHS= $\sum_{d>x} b(d)\log d\, d^{-2} = \lim_{N\to\infty}\sum_{x<d\leq N} b(d)\frac{\log d}{d^2} = \lim_{N\to\infty}\int_x^N\frac{\log\xi}{\xi^2}d\sum_{x<d\leq\xi} b(d) = O(\log N/N) - \int_x^N\frac{1-\log\xi}{\xi^3}\sum_{x<d<\xi} b(d)d\xi = 2\int_x^\infty\frac{\log\xi - 1}{\xi^3}O(\xi)d\xi = O(\log x/x)$ 注意 $\log x + 1/x$ 导数是 $-\log x/x^2$，故得证

Exercise 3. 对 $x > 3$，$\sum_{1<n\leq x}\frac{1}{n\log n} = \log\log x + C_1 + O(1/(x\log x))$. pf: Euler–Maclaurin，LHS= $\int_2^x\frac{d\xi}{\xi\log\xi} + \int_2^x(\{\xi\} - \frac{1}{2})(\frac{1}{\xi\log\xi})'d\xi + (\{x\} - \frac{1}{2})\frac{1}{x\log x} - (\{2\} - \frac{1}{2})\frac{1}{2\log 2} = \{\log\log x\} - \{\log\log 2 + \frac{1}{4\log 2} + \int_2^\infty[(\{\xi\} - \frac{1}{2})(\frac{1}{\xi\log\xi})'d\xi\} - \{\int_x^\infty[(\{\xi\} - \frac{1}{2})(\frac{1}{\xi\log\xi})'d\xi + (\{x\} - \frac{1}{2})\frac{1}{x\log x}\}$，即为所求。

Exercise 4. $r_2(n) := \#\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + b^2 = n\}$，求证 $\sum_{n\leq x} r_2(n) = \pi x + O(\sqrt{x})$. pf: $\sum_{n\leq x} r_2(n) = 4\sum_{0\leq a\leq\sqrt{x}}\sum_{0<b<\sqrt{x-a^2}} 1 + 1 = 4\sum_{0\leq a\leq\sqrt{x}}[\sqrt{x-a^2}] + 1 = 4\sum_{0\leq a\leq\sqrt{x}}\sqrt{x-a^2} + O(\sqrt{x})$。关于 a 单调，$\sum_{0\leq a\leq\sqrt{x}}\sqrt{x-a^2} = \int_0^{\sqrt{x}}\sqrt{x-a^2}\,da + O(\sqrt{x}) = -\frac{x\arccos(a/\sqrt{x})}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}} + \frac{a\sqrt{x-a^2}}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}} + O(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4}x + O(\sqrt{x})$，且 $a = 0$ 值也为 $O(\sqrt{x})$。

Exercise 5. $Q_2(x) = \#\{n \leq x \mid n \text{ 无平方因子}\}$，则 $Q_2(x) = C_2 x + O(\sqrt{x})\ (C_2 = 6/\pi^2)$. pf: $Q_2(x) = \sum_{n\leq x}\mu^2(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{d^2|n}\mu(d) = \sum_{d\leq\sqrt{x}}[x/d^2]\mu(d) = \sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{x\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) = x\sum_{d\geq 1}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) = x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(\sqrt{x}) = x(\sum_{d\geq\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2}) + O(\sqrt{x}) = \frac{1}{\zeta(2)}x + O(x\int_{\sqrt{x}}^\infty\xi^{-2}d\xi) + O(\sqrt{x}) = \frac{1}{\zeta(2)}x + O(\sqrt{x})$。

Exercise 6. $\forall\varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \tau(n) < C_\varepsilon n^\varepsilon$. pf: 选 P s.t. $\forall p > P, \forall\alpha \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \alpha+1 < p^{\varepsilon\alpha}$，再取 $C_\varepsilon = \prod_{p<P}\sup_{\alpha\geq 1}(\alpha+1)/p^{\alpha\varepsilon} < \infty$，则 $\tau(\prod p_i^{\alpha_i}) = \prod(\alpha_i+1) \leq C_\varepsilon\prod p_i^{\varepsilon\alpha_i}$。

Exercise Sheet 3

Exercise 1. 若 $\sum_{p\leq x} f(p)\log p = (ax + b)\log x + cx + O(1)\ (x \geq 2)$，则 $\exists B = B(f)$，$\sum_{p\leq x} f(p) = ax + (a + c)(\frac{x}{\log x} + \int_2^x\frac{dt}{\log^2 t}) + b\log\log x + B + O(\frac{1}{\log x})$. pf: $A(x) := \sum_{p\leq x} f(p)\log p$，LHS= $\sum_{2\leq n\leq x} f(n)\log n\,\delta_p(n)\frac{1}{\log n} \overset{\text{Abel}}{=} \frac{A(x)}{\log x} + \int_{3/2}^x A(\xi)\frac{1}{\xi\log^2\xi}d\xi$ =（条件）$ax + b + c\frac{x}{\log x} + O(\frac{1}{\log x}) + \int_{3/2}^x(\frac{a\xi+b}{\xi\log\xi} + \frac{c}{\log^2\xi} + \frac{E(\xi)}{\xi\log^2\xi})d\xi$，其中 $E(\xi) \ll 1$，注意 $\frac{1}{x\log x} = (\log\log x)'$ 且 $a\int_{3/2}^x\frac{d\xi}{\log\xi} = a\frac{\xi}{\log\xi}\Big|_{3/2}^x + a\int_{3/2}^x\frac{d\xi}{\log^2\xi}$，积分下限可调整后放入 B 中。

Exercise 2. 证明对 $n \geq 16$，$\sum_{p|n}\frac{1}{p} \ll \log\log\log n$. pf: $\sum_{p|n}\frac{1}{p} = \sum_{p|n,\, p\leq\log n}\frac{1}{p} + \sum_{p|n,\, p>\log n}\frac{1}{p} \ll$ (by Mertens) $\log\log\log n + \sum_{p>\log n}\frac{1}{p}$. 由于 $(\log n)^{\log n/\log\log n} = n$ 从而 $> \log n$ 素数个数不超过 $\frac{\log n}{\log\log n}$，于是 $\sum_{p>\log n,\, p|n}\frac{1}{p} \leq \frac{1}{\log n}\frac{\log n}{\log\log n} \ll \log\log\log n$。

Exercise 3. 证明 $\sum_p\frac{1}{p(\log\log p)^\alpha}$，$\alpha > 1$ 收敛，$\alpha \leq 1$ 发散. pf: 忽略前面的项，$\pi = \lim_{N\to\infty} S_N$，其中 $S_N = \sum_{5<n\leq N}\delta_p(n)\frac{1}{n}\frac{1}{(\log\log n)^\alpha} = \sum_{5<p\leq N}\frac{1}{p}\frac{1}{(\log\log N)^\alpha} + \int_5^N(\sum_{5<p\leq\xi}\frac{1}{p})\frac{d\xi}{(\log\log\xi)^{\alpha+1}\,\xi\log\xi}$，而 $\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} \sim \log\log x$ 且 $\int_5^\infty\frac{dx}{x\log x(\log\log x)^\alpha}$ 在 $\alpha > 1$ 收敛，$\alpha \leq 1$ 发散（用换元 $u = \log\log x$，$\frac{dx}{x\log x} = du$）即证。

Exercise 4. 设 $S(x) = \#\{n \leq x \mid p \mid n \Rightarrow p \leq \sqrt{n}\}$，证明 $S(x) = (1 - \log 2)x + O(x/\log x)$. pf: $S(x) = [x] - \sum_{2\leq p\leq x}\sum_{m\leq x/p,\, m<p} 1 = [x] - \sum_{2\leq p\leq\sqrt{x}}\sum_{m<p} 1 - \sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\sum_{m\leq x/p} 1 = [x] - \sum_{2\leq p\leq\sqrt{x}}(p-1) - \sum_{\sqrt{x}<p\leq x}[\frac{x}{p}]$，而 $[x] = x + O(1)$，$\sum_{2\leq p\leq\sqrt{x}}(p-1) \leq \sqrt{x}\pi(\sqrt{x}) = O(x/\log x)$，$\sum_{\sqrt{x}<p\leq x}[\frac{x}{p}] = x\sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\frac{1}{p} + O(\pi(x)) = x[(\log\log x + C + O(\frac{1}{\log x})) - (\log\log\sqrt{x} + C + O(\frac{1}{\log\sqrt{x}}))] + O(x/\log x) = x\log 2 + O(x/\log x)$，代回即得。

Exercise 5. 若 $\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n} = o(1)$，则 PNT. pf: $\sum_{1/2<n\leq x}\mu(n) = \sum_{1/2<n\leq x}\frac{\mu(n)}{n}n \overset{\text{Abel}}{=} x\sum_{1/2<n\leq x}\frac{\mu(n)}{n} - \int_{1/2}^x\sum_{1/2<n\leq\xi}\frac{\mu(n)}{n}d\xi = o(x) + \int_{1/2}^{\sqrt{x}} M\,d\xi + \int_{\sqrt{x}}^x o(1)\,d\xi = o(x) \Rightarrow$ PNT。

Exercise 6. $L(N) = \operatorname{lcm}\{1, 2, \ldots, N\}$，求证 PNT$\Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} L(N)^{1/N} = e$. pf: $\log L(N) = \sum_{p^\alpha\leq N}\log p = \psi(N)$，故 $L(N)^{1/N} \to e$ iff $\frac{\psi(N)}{N} \to 1$ iff $\psi(x) \sim x$ iff PNT.

Exercise 7. $\forall n > 1$，$\exists p$ s.t. $p \| n!$. pf: Bertrand’s 假设，取 $\frac{n}{2} < p < n$，则 $2p > n$，之后显然。

Exercise Sheet 4

Exercise 1. TFAE: (a) $f(n) \ll n^A\ (A > 0)$; (b) $\sigma_a < +\infty$. pf: ① (a) 蕴含 $|f(n)| \leq Cn^A$，故 $|L_f(s)| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{C}{n^{\sigma-A}}$，即 $\operatorname{Re}(s) > A + 1$ 时 $L_f(s)$ 绝对收敛，那 $\sigma_a < +\infty$。② (b) 蕴含 $\exists c > 0$，$\sum_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n^c}$ 绝对收敛，那 $\lim_{n\to\infty}\frac{|f(n)|}{n^c} = 0$，则 $f(n) \ll n^c$。

Exercise 2. (a) 找例子 s.t. $\sigma_a = \sigma_c + 1$; (b) 任给实数 σ_a, σ_c，$\sigma_a - 1 \leq \sigma_c \leq \sigma_a$，求 f 使 L_f 对应参数为 σ_a, σ_c. 对 (a) $f(n) = (-1)^n$ 有 $\sigma_c = 0, \sigma_a = 1$; (b) $f(n) = (-1)^n n^{\sigma_a - 1} + 1_{n=2^k}n^{\sigma_c}$，前一个对应 L 级数参数为 $\sigma_a - 1, \sigma_a$，后一个为 σ_c。

Exercise 3. 找 $F(s) = \sum_{m_1,m_2,m_3\geq 1}(m_1 + m_2 + m_3)^{-s}$ 的绝对收敛横坐标，用 $\zeta(s)$ 表示. $F(s) = \sum_{n\geq 1}\sum_{m_1+m_2+m_3=n} n^{-s} = \sum_{n\geq 3}\binom{n-1}{2}n^{-s}$，$\binom{n-1}{2} \asymp n^2/2$，故 $\sigma_a = 3$。$F(s) = \sum_{n\geq 3}\frac{n^2-3n+2}{2}n^{-s} = \frac{1}{2}(\zeta(s-2) - 3\zeta(s-1) + 2\zeta(s))\ (n = 0, 1, 2$ 项抵消)。

Exercise 4. $\chi(n)$ 定义为 (1) $\chi(1) = 1$，$\chi(p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$，计算 (a) $\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n^2)}{n^s}$; (b) $\sum_{n\geq 1}\frac{2^{\omega(n)}}{n^s}$; (c) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{\Omega(n)}}{n^s}$; (d) $\sum_{n\geq 1}\frac{3^{\omega(n)}\chi(n)}{n^s}$. pf: (a) $\tau(n^2)$ 可乘，用 Euler 乘积，$\sum_{n\geq 1}\frac{\tau(n^2)}{n^s} = \prod_p(1 + \sum_{\nu\geq 1}\frac{\tau(p^{2\nu})}{p^{\nu s}}) = \prod_p(1 + \sum_{\nu\geq 1}\frac{2\nu+1}{p^{\nu s}}) = \prod_p((1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-s})^{-1}(1+p^{-s})) = \prod_p(1-p^{-s})^{-3}(1-p^{-2s}) = \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}$。(b) $2^{\omega(n)}$ 可乘，原式 $= \prod_p(1 + \sum_{\nu\geq 1}\frac{2}{p^{\nu s}}) = \prod_p(1-p^{-2s})\prod_p(1-p^{-s})^{-2} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}$。(c) 显然 $= \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$（是 Liouville 函数）。(d) 可乘，$= \prod_p(1 + \sum_{\nu\geq 1}\frac{3\chi_\nu}{p^{\nu s}}) =$（错位相减）$= \prod_p(1 + \frac{3p^s}{(p^s-1)^2}) = \prod_p(1-p^{-3s})(1-p^{-s})^{-3} = \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(3s)}$。

Exercise 5. 对 $c > 0$，$f_{(c)} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$. 证明 $(2\pi i)^{-1}\int_{(2)} y^s s^{-2}\,ds = 0$ if $0 < y \leq 1$，$= \log y$ if $y \geq 1$；用包含 Λ 的和式表示 $(2\pi i)^{-1}\int_{(2)} y^s s^{-2}(-\zeta'/\zeta)(s)\,ds$ *Solution.* 模仿讲义围道积分，模仿讲义 perron 公式可得 $(2\pi i)^{-1}\int_{(2)} y^s s^{-2}(-\zeta'/\zeta)\,ds = \sum_{n\leq y}\Lambda(n)\log(y/n)$

Exercise 6. $\operatorname{Re}(s) > 1$，$\frac{1}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty\frac{M(x)}{x^{s+1}}dx$，$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s\int_1^\infty\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx$，其中 $M(x) = \sum_{n\leq x}\mu(n)$，$\psi(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n)$. pf: (a) $s\int_1^N\frac{M(x)}{x^{s+1}}dx = s\sum_{n=1}^N\mu(n)\int_n^N\frac{1}{x^{s+1}}dx = -[\sum_{n=1}^N\frac{\mu(n)}{N^s} - \sum_{n=1}^N\frac{\mu(n)}{n^s}]$（取 $N \to \infty$）$= \sum_{n=1}^\infty\frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$。(b) $s\int_1^N\frac{\psi(x)}{x^{s+1}}dx = s\sum_{n=1}^N\Lambda(n)\int_n^N\frac{1}{x^{s+1}}dx = -[\sum_{n=1}^N\frac{\Lambda(n)}{N^s} - \sum_{n=1}^N\frac{\Lambda(n)}{n^s}] \to \sum_{n=1}^\infty\frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$。

Exercise 5

Exercise 1. $k = 2^\alpha$，$\forall a$ 奇，$a \equiv (-1)^{r-1(a)}5^{r_0(a)} \pmod{2^\alpha}$，对 $\alpha \geq 2$，(a) $r_{-1}(a) \equiv \frac{a-1}{2} \pmod 2$; (b) $a \equiv a' \pmod{2^\alpha}$ iff $r_{-1}(a') \equiv r_{-1}(a) \pmod 2$，$r_0(a') \equiv r_0(a) \pmod{2^{\alpha-2}}$. pf: 显，见讲义。

Exercise 2. $\varphi^*(k)$ 是模 k 本原特征个数。求证 $\varphi^*(k) = \sum_{d|k}\mu(d)\varphi(k/d) = k\prod_{p|k}(1 - \frac{2}{p})\prod_{p^2|k}(1 - \frac{1}{p})^2$. pf: 每个模 k 特征唯一由一个模 $d \mid k$ 本原特征诱导，故 $\varphi(k) = \sum_{d|k}\varphi^*(d) \Rightarrow \varphi^*(k) = \sum_{d|k}\mu(d)\varphi(k/d)$，第二个等式由可乘性，只需化 $k = p^\alpha$，$\sum_{d|p^\alpha}\mu(d)\varphi(p^\alpha/d) = \varphi(p^\alpha) - \varphi(p^{\alpha-1})$

Exercise 3. χ 模 k 的 D 特征，$k' \mid k$，TFAE: (a) χ 由 k' 本原特征诱导；(b) 若 $(n_i, k) = 1$ 且 $n_1 \equiv n_2 \pmod{k'}$，则 $\chi(n_1) = \chi(n_2)$；(c) $\chi(n_1) = 1$，$\forall n_1 \equiv 1 \pmod{k'}$，$(n_1, k) = 1$. pf: 讲义 6.3.2。

Exercise 4. $k = 2^\alpha$，$\alpha \geq 3$，$\chi(n, k, m_{-1}, m_0) = (-1)^{m_{-1}r_{-1}(n)}e(\frac{m_0 r_0(n)}{2^{\alpha-2}})\ ((n, 2) = 1)$，本原 iff $(m_0, 2) = 1$. pf: 见 6.3.6。

Exercise 5. 模 4 非主特征本原：$\chi_4(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\ ((n, 2) = 1)$。模 8 本原实特征只有，$\chi_8(n) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\ ((n, 2) = 1$，$\chi_4(n)\chi_8(n) = (-1)^{\frac{(n-1)(n+5)}{8}}\ ((n, 2) = 1)$。pf: 直接计算。

Exercise 6. $f : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$，$\widehat{f} : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$，$\widehat{f}(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{a \bmod q} f(a)e^{2\pi i\alpha a/q}$。(a) $f, g : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$，证明 $\sum_{a \bmod q} f(a)\overline{g(a)} = \sum_{\alpha \bmod q}\widehat{f}(\alpha)\overline{\widehat{g}(\alpha)}$; (b) $\sum_{a \bmod q}|f(a)|^2 = \sum_{a \bmod q}|\widehat{f}(\alpha)|^2$; (c) $I = [A, B] \subset [0, q]$，计算 $\widehat{1_I}(\alpha)$; (d) 求证 $\sum_{\alpha \bmod q}|\widehat{1_I}(\alpha)| \ll \sqrt{q}\log q$; (e) 证明对本原 D-特征 $\chi \bmod q$，$\forall N \geq 1$，$\sum_{n=1}^N\chi(n) \ll \sqrt{q}\log q$. (a) pf: 换序求和，显，(用加法特征正交性。) (b) pf: (a) 中取 $f = g$。(c) pf: $\widehat{1_I}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{A\leq a\leq B}e^{2\pi i\alpha a/q}$（等比级数）。不妨设 $A, B \in \mathbb{Z}$，(否则考虑 $[A]+1$，$[B]$; $\widehat{1_I}(0) = \frac{1}{\sqrt{q}}(B - A + 1)$，$\widehat{1_I}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{q}}\frac{e^{2\pi i\alpha A/q}(1-e^{2\pi i\alpha(B-A+1)/q})}{1-e^{2\pi i\alpha/q}}$。(d) pf: 其中 $L = \widehat{B} - \widehat{A} + 1$，LHS= $\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\alpha \bmod q}\frac{|1-e^{2\pi i\alpha L/q}|}{|1-e^{2\pi i\alpha/q}|} \leq \sum_\alpha\frac{1}{\sqrt{q}}\frac{2}{|1-e^{2\pi i\alpha/q}|} = \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{\alpha \bmod q}\frac{1}{|\sin(\pi\alpha/q)|} \ll \frac{2}{\sqrt{q}}\sum_{\alpha=1}^{(q+1)/2}\frac{\pi}{2\alpha/q} \ll \sqrt{q}\log q$，(利用 $x \in [0, \pi/2]$，$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 和 $\sin x = \sin(\pi - x)$。) (e) pf: 见讲义 Thm 6.4.9。

Exercise 7. p 素数，$(\frac{n}{p})$ 是 D 特征模 p，求证模 p 的最小非二次剩余大小为 $O(\sqrt{p}\log p)$. pf: $\chi(n) := (\frac{n}{p})$ 不是模 1 本原特征，从而是模 p 本原特征。若 N 是最小的模 p 非二次剩余，则 $N - 1 = \sum_{n=1}^{N-1}\chi(n) \ll \sqrt{p}\log p$，故 $N \ll \sqrt{p}\log p$。

Exercise Sheet 6

Exercise 1. 有限 Abel 群 G: $G \simeq \widehat{G}$. pf: 见讲义 6.1 节。

Exercise 2. (a) $\operatorname{Re}(s) > 1$，$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^{s+1}}d\xi$（给出 $\operatorname{Re}(s) > 0$ 的亚纯延拓）; (b) 洛朗展开 $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(|s-1|)\ (s \to 1)$，$\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n\frac{1}{k} - \log n)$. pf: (a) Euler-Maclaurin（讲义 2.2.3），$\zeta(s) = \lim_{N\to\infty}(1 + \sum_{1<n\leq N}\frac{1}{n^s}) = 1 + \int_1^\infty\frac{1}{x^s}dx - \int_1^\infty(\{x\} - \frac{1}{2})\frac{s}{x^{s+1}}dx + \lim_{N\to\infty}\frac{\{N\}-1/2}{N^s} - \frac{\{1\}-1/2}{1^s} = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^{s+1}}d\xi$。(b) $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + (1 - \int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^2}d\xi) + (\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^2}d\xi - s\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^{s+1}}d\xi)$，由讲义 2.2.4，$\gamma = 1 - \int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^2}d\xi$，而且 $\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^2}d\xi - s\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^{s+1}}d\xi = \int_1^\infty(\frac{\{\xi\}}{\xi^2} - \frac{\{\xi\}}{\xi^{s+1}})d\xi - (s-1)\int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^{s+1}}d\xi = \int_1^\infty\frac{\{\xi\}}{\xi^{s+1}}(\xi^{s-1} - 1)d\xi + O(s-1) = \int_1^\infty O(\frac{1}{\xi^{1+\delta}})O((s-1)\log\xi)d\xi = O(s-1)\ (s \to 1)$。

Exercise 3. $\prod_{p\leq x}(1 - \frac{1}{p})^{-1} = C\log x + O(1)$，求证 $C = e^\gamma$. pf: $P(x) = \prod_{p\leq x}(1 - \frac{1}{p})^{-1}$，$L = \log x$。Ex 6-2 (b) $\Rightarrow \zeta(1 + \frac{1}{L}) = L + O(1)$，而且 $\log\zeta(1 + \frac{1}{L}) = \sum_p -\log(1 - p^{-1-1/L}) = \sum_p\sum_{k\geq 1}\frac{p^{-k(1+1/L)}}{k} = \sum_p -\log(1 - \frac{1}{p})p^{-1/L} + o(1)\ (x \to \infty)$。由 Abel，$\sum_p -\log(1 - \frac{1}{p})p^{-1/L} = \int_{1-0}^\infty y^{-1/L}\,d\sum_{2\leq p\leq y} -\log(1 - \frac{1}{p}) = \frac{1}{L}\int_2^\infty y^{-1/L-1}\sum_{2\leq p\leq y} -\log(1 - \frac{1}{p})\,dy$，故 $\log L + o(1) = \log\zeta(1 + \frac{1}{L}) = \frac{1}{L}\int_2^\infty y^{-1/L-1}\log\prod_{p\leq y}(1 - \frac{1}{p})^{-1}\,dy + o(1)$。而 $C\log y + O(1) = C\log y(1 + O(\frac{1}{\log y}))$，故上式 $= \frac{1}{L}\int_2^\infty y^{-1/L-1}[\log C + \log\log y + O(\frac{1}{\log y})]\,dy + o(1) = \log L + \log C - \gamma + o(1)$（换元 $\frac{dy}{y} = \mathrm{d}(\log y)$），所以 $\log C = \gamma$，$C = e^\gamma$。

Exercise 4. $\chi \bmod q$，$\chi \neq \chi_0$，$x \geq 2$，证明 (a) $\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)\log n}{n} = -L'(1, \chi) + O_\chi(\frac{\log x}{x})$; (b) $\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)\log n}{n} = L(1, \chi)\sum_{m\leq x}\frac{\chi(m)\Lambda(m)}{m} + O_\chi(\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\Lambda(n))$，从而 $\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n} = O_\chi(1)$; (c) $\sum_{p\leq x}\frac{\chi(p)\log p}{p} = O_\chi(1)$; (d) $\sum_{p\leq x}\frac{\chi(p)}{p} = b(\chi) + O_\chi(\frac{1}{\log x})$，其中 $b(\chi) = \log L(1, \chi) - \sum_p\sum_{k\geq 2}\frac{\chi(p^k)}{kp^k}$. pf: (a) $\sum_{n=1}^N\frac{\chi(n)}{n^s} = \frac{S(N)}{N^s} + s\int_1^N\frac{S(y)}{y^{s+1}}dy$，$S(y) = \sum_{n\leq y}\chi(n)$ 有界，故 L_χ 的 $\sigma_c \leq 0$。讲义 4.10 $\Rightarrow -L'(1, \chi) = \sum_{n\geq 1}\frac{\chi(n)\log n}{n} = \sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)\log n}{n} + \sum_{n>x}\frac{\chi(n)\log n}{n}$，而 $\sum_{n>x}\frac{\log n}{n}\chi(n) \overset{\text{Abel}}{=} \lim_{N\to\infty}[\sum_{x<n\leq N}\chi(n)\frac{\log N}{N} - \int_x^N\sum_{x<n\leq\xi}\chi(n)(\frac{\log\xi}{\xi})'d\xi] = O_\chi(\frac{\log x}{x})$。(b) $\log = \Lambda * 1$，$\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)\log n}{n} = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}\frac{\chi(n/d)}{n/d} = \sum_{d\leq x}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}\sum_{n\leq x/d}\frac{\chi(n)}{n} = L(1, \chi)\sum_{d\leq x}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d} - \sum_{d\leq x}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}\sum_{m>x/d}\frac{\chi(m)}{m}$，且 $\sum_{d\leq x}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}\sum_{m>x/d}\frac{\chi(m)}{m} = (dm = e)\sum_{d\leq x}\Lambda(d)\sum_{e>x\atop d|e}\frac{\chi(e)}{e}$，Abel 求和 $\Rightarrow O_\chi(\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\Lambda(n))$。(c) $\sum_{p\leq x}\frac{\chi(p)\log p}{p} = \sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n} - \sum_{p^\ell\leq x\atop \ell\geq 2}\frac{\chi(p)^\ell\log p}{p^\ell}$，由 (b) 第一项有界，第二项 $\leq \sum_{p\leq\sqrt{x}}\log p\sum_{\ell\geq 2}\frac{1}{p^\ell} = \sum_{p\leq\sqrt{x}}\frac{\log p}{p(p-1)} = O(\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{1}{n\log n})$ 有界。(d) $\sum_p\sum_{k\geq 1}\frac{\chi(p^k)}{kp^k} = -\sum_p\log(1 - \frac{\chi(p)}{p}) = \log L(1, \chi)$，故 $\sum_p\frac{\chi(p)}{p} = \log L(1, \chi) - \sum_p\sum_{k\geq 2}\frac{\chi(p^k)}{kp^k}$。而 $\sum_{p>x}\frac{\chi(p)}{p} = \sum_{p>x}\frac{\chi(p)\log p}{p}\frac{1}{\log p} \overset{\text{Abel}}{=} \sum_{x<p\leq N}\frac{\chi(p)\log p}{p}\frac{1}{\log N} - \int_x^N(\frac{1}{\log\xi})'\sum_{x<p\leq\xi}\frac{\chi(p)\log p}{p}d\xi = O_\chi(\frac{1}{\log x})$。(由 (c))

Exercise 5. $|\arg s| \leq \pi - \delta$，求证 $\Gamma'(s)/\Gamma(s) = \log s - \frac{1}{2s} + O_\delta(|s|^{-2})$. pf: $F(s) \triangleq \log\Gamma